

Herramientas Matemáticas

APLICADAS A LAS CIENCIAS
SOCIALES Y ADMINISTRATIVAS

CRISTIAN GILBERTO MÉNDEZ MEDRANO
OMAR GABRIEL MEJÍA FLORES
RÓMULO ALEJANDRO BARBA LÓPEZ
RAÚL ANDRÉS VILLAO VERA
EDDY FAVIAN SOLÓRZANO SOLÓRZANO



ESTUDIO DE INVESTIGACIÓN Y
DESARROLLO EMPRESARIAL
ACADÉMICO

Herramientas Matemáticas

APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES Y ADMINISTRATIVAS

AUTORES

**CRISTIAN GILBERTO MÉNDEZ MEDRANO
OMAR GABRIEL MAJÍA FLORES
RÓMULO ALEJANDRO BARBA LÓPEZ
RAÚL ANDRÉS VILLAO VERA
EDDY FABIAN SOLÓRZANO SOLÓRZANO**

Título de la obra:

Herramientas Matemáticas
APLICADAS A LAS CIENCIAS
SOCIALES Y ADMINISTRATIVAS

Editor:

Ing. Eduardo Lascano L., MBA

Autores:

Cristian Gilberto Méndez Medrano
Omar Gabriel Majía Flores
Rómulo Alejandro Barba López
Raúl Andrés Villao Vera
Eddy Fabian Solórzano Solórzano

Corrección Idiomática – Estilo

Lic. Patricia García Basurto., Mgtr.

© 1RA. EDICIÓN: ENERO 2025

ISBN Impreso: 978-9942-805-26-3

No. de Registro de derecho de Autor SENADI: En trámite

Edición – Impresión:

Edicumbre Editorial Corporativa
Dirección: Grecia N32-175 y La Granja - Edf.: NOGAL PISO 2
Telf.: 098 385 5681

E-mail: edicumbreeditorial@hotmail.com

Diseño Portada:

Edicumbre Editorial Corporativa

Diseño Interior:

Edicumbre Editorial Corporativa

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo por escrito de los autores.

DEDICATORIA

A mi amada familia, pilar fundamental en cada paso de este camino. A mi madre Martha, a mi esposa, María Alejandra, por su inagotable paciencia, amor y apoyo incondicional. A mis hijos, Samuel Matías y Arianna Doménica, por ser mi mayor inspiración y recordarme la importancia de perseverar. Este libro es tanto suyo como mío, pues sin su comprensión y compañía, su creación no habría sido posible. Gracias por ser mi luz en los momentos más difíciles y por compartir conmigo cada logro. Este sueño cumplido es también un reflejo del amor que nos une.

Cristian

El trabajo investigativo se lo dedico a Dios por la salud, fortaleza y perseverancia que me ha dado para continuar mi camino en el ámbito investigativo permitiendo ampliar el conocimiento de muchos estudiantes o investigadores a los cuales mi trabajo les será de gran ayuda. Así también, dedico este trabajo a mis padres y hermana (+) que con su amor y principios de enseñanza han guiado mi camino a la ciencia.

Omar

Dedico este trabajo a mi amada esposa Janeth y a mis queridos hijos; Kevin, Joel y Christopher por su apoyo incondicional

Rómulo

A mi esposa Betty, y a mis hijas, Sofía Isabella (7) y Elina Aitanna (1). Por inspirarme día a día a seguirme superando.

Raúl

A mi madre Mercedes María y a mi hijo Jeremy Favian (14). Por ser los pilares de mi vida y el motor que impulsan para inspirarme a cumplir este sueño.

Favian

AGRADECIMIENTO

La realización de este libro ha sido un proceso lleno de retos y aprendizajes, y no habría sido posible sin el apoyo de personas que me han acompañado en esta travesía.

En primer lugar, agradezco a mi familia, cuya paciencia, amor y aliento incondicional han sido mi principal fuente de motivación. A mi esposa, María Alejandra, y a mis hijos, Samuel Matías y Arianna Doménica, les debo todo mi agradecimiento por su constante comprensión y apoyo.

A mis colegas y amigos, gracias por su respaldo y por compartir sus conocimientos, ayudándome a crecer en el ámbito académico. Su colaboración ha sido esencial para la elaboración de este proyecto. Finalmente, a todos aquellos que, de una u otra manera, han dejado su huella en este trabajo, les expreso mi más profundo agradecimiento. Este libro es un reflejo no solo de mi esfuerzo, sino del apoyo y la inspiración de todas las personas que han creído en mí.

Cristian

A Dios por ser la guía para cumplir con los objetivos trazados.

A mis padres y hermana (+) por su apoyo incondicional en todas las metas propuestas.

A mis hijos ya que son su amor y paciencia me enseñan a seguir forjando mi camino en la academia.

Omar

Agradezco a mi esposa e hijos por la motivación que siempre me han transmitido con su amor y consideración

Rómulo

Agradezco a mis compañeros que participaron en este libro, y por confiar en mis conocimientos para ser partícipe del mismo.

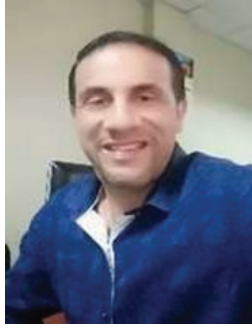
Raúl

Agradezco a mi familia quienes, con su cariño y paciencia, me acompañaron durante este largo proceso y mis estudiantes por ser mi inspiración constante en este viaje educativo, ustedes me recordaron cada día que el aprendizaje es un camino de doble sentido, en el que tanto maestros como alumnos crecemos juntos. Este libro es un reflejo de sus ganas de aprender, de su perseverancia y de su pasión por resolver problemas.

Favian

BIOGRAFÍA

CRISTIAN GILBERTO MÉNDEZ MEDRANO



Cristian Gilberto Méndez Medrano nació el 16 de agosto de 1975 en Guayaquil, Ecuador, en la parroquia Tarqui, provincia de Guayas. Actualmente está casado con María Alejandra Zúñiga Alvarado y tiene dos hijos. Es Ingeniero Comercial, graduado de la Universidad Laica Vicente Rocafuerte de Guayaquil, y posee una Maestría en Educación con mención en Enseñanza de la Matemática, obtenida en la Escuela Superior Politécnica del Litoral en 2013.

A lo largo de su carrera profesional, ha desempeñado diversos cargos en el ámbito educativo. Entre 1998 y 2014, fue docente y director del área de Matemáticas en la Academia Naval Almirante Illingworth. Posteriormente, trabajó como docente y miembro del consejo directivo en el Tecnológico AITEC hasta 2016. Desde julio de 2016, ocupa el cargo de profesor agregado de tiempo completo en la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación de la Universidad de Guayaquil. En cuanto a su producción científica, Méndez Medrano ha publicado artículos en revistas nacionales e internacionales. Sus investigaciones abarcan temas como el emprendimiento en Guayaquil, el uso de tecnologías en la enseñanza de matemáticas, el aprendizaje basado en problemas y la ética en la educación superior. Su trabajo más reciente, publicado en 2024, trata sobre la percepción ante la diversidad funcional y las estrategias para la formación de docentes inclusivos en una revista indexada en Scopus.

OMAR GABRIEL MEJÍA FLORES



Nació en Guayaquil el 16 de junio de 1987. Estudió ingeniería comercial y un masterado en tributación y finanzas en la Universidad de Guayaquil, también realizó un masterado en Gestión Pública en la Universidad César Vallejo – Perú – Piura. Es egresado del Doctora en Administración de Empresas en la Universidad Pontificia Católica de Perú. Recientemente obtuvo su título de PhD (c) en economía por parte de la Universidad de Zulia – Venezuela.

Omar cuenta con dos empresas una de ellas encaminada a la investigación académica siendo presidente E-IDEA OMWIN S.A. la misma tiene más de 5 años en el mercado teniendo acogida por estudiantes, profesores, profesionales de diferentes ramas con objetivos y ganas de dedicarse a la investigación académica. Ha sido profesor de diferentes instituciones de educación superior tanto públicas como privadas.

Actualmente labora como Presidente de ambas empresas constituidas por él y como instructor de cursos de capacitación como Formador de Formadores, posee altos conocimientos tributarios, financieros, contables, estadísticos, emprendimiento y en economía.

ORCID: 0000-0001- 5129-8933

RÓMULO ALEJANDRO BARBA LÓPEZ



Ingeniero Civil Graduado en la Universidad de Guayaquil en el año 1986.

Licenciado en Ciencias de la Educación.

Magister en Administración de Empresas: Mención Negocios Internacionales.

Magister en Contabilidad Pública Internacional.

Magister en Geotecnia.

Egresado de PHD en Ciencias Sociales: Mención Gerencia.

Docente de la Universidad de Guayaquil desde el año 1997.

Ha realizado varios seminarios y cursos en el área Educativa e Ingeniería.

Ha participado en varias Ponencias.

Autor de algunos artículos científicos indexados.

Coordinador de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas/ Carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales durante el periodo 1999 al 2000.

Contratado por Servicios Profesionales en la Unidad de Proyectos y Vinculación con la Colectividad, de la Universidad de Guayaquil durante el periodo 2008 al 2010.

Contratista en obra Pública.

Contratista en Obra Privado desde el año 1986 hasta la actualidad.

ORCID-0000- 001-7674-2623

RAÚL ANDRÉS VILLAO VERA



Ingeniero Civil graduado en la Universidad Católica de Santiago de Guayaquil en el año 2011.

Máster en Construcción en España (becado) y actualmente aspirante a Ph.D.

Conocimientos en el área de estructuras, donde tiene un Diplomado realizado en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Se ha desarrollado laboralmente en el sector público y privado.

Es consultor y constructor.

Docente con 9 años de experiencia en la Universidad Estatal Península de Santa Elena (UPSE) y 2 años en la Universidad Laica Vicente Rocafuerte de Guayaquil.

Autor de varios artículos científicos en revistas indexadas.

Conferencista en diversas jornadas científicas, locales e internacionales.

ORCID - 0000-0001-9125-6535

EDDY FAVIAN SOLÓRZANO SOLÓRZANO



Es Ingeniero Industrial graduado en la Universidad Técnica de Manabí en el año 2005. Posee título de 4to nivel en Formación del Profesorado de Educación Secundaria de Ecuador Especialidad en Física y Química.

Amplio conocimiento en Matemática, Física y Química.

Docente con 18 años de experiencia en instituciones públicas y privadas de Educación Básica Media, Bachillerato y Superior.

Autor de varios artículos científicos en revistas indexadas.

Ponente de varios eventos a nivel nacional e internacional, entre ellas:

Impacto del Aprendizaje Basado en Proyectos en la Comprensión y Aplicación de Conceptos Matemáticos en Estudiantes de Bachillerato;

Impacto del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) en la Comprensión de los Principios de la Física en Estudiantes de Bachillerato;

Desarrollo de modelos de seguridad laboral para Pymes, usando estrategias del campo de la física.

ORCID - 0009-0002-5904-0544

PRÓLOGO

El texto titulado Iniciación a la Matemática Universitaria escrito siguiendo la estructura del programa de Lógica y Matemática para la Ingeniería y mas específicamente a las Ciencias Sociales, por el Ing. Cristian Méndez Medrano y el Lcdo. Rolando Álvarez Beltrán; docentes de reconocida trayectoria y con muchos años de experiencia enseñando matemática, representa un importante aporte, al estudiante que necesita formación matemática indispensable para el desarrollo científico, tecnológico y social de la sociedad donde se desenvuelve.

Este material de apoyo, redundará en el desarrollo de las habilidades y destrezas que exige el contenido programático de las unidades curriculares establecidas en la educación matemática universitaria para los primeros años del plan de estudios. El tratamiento de los temas se lleva a cabo, siguiendo el encadenamiento lógico de los conceptos, y se exponen en forma sencilla con precisión de lenguaje; adecuadamente ilustrados a través de tablas, la disposición de ejemplos y ejercicios propuestos que conllevan al estudiante a la aplicación analítica de las operaciones lógicas y símbolos matemáticos en actividades inherentes al proceso de razonamiento abstracto.

Este texto refleja la filosofía sostenida acerca de que un texto de matemática a nivel pre-universitario debe ser leíble, directo y cargado de motivación para el estudiante; en fin, este libro aun cuando está escrito pensando fundamentalmente en el estudiante, también constituye una ayuda valiosa para el docente.

Los Autores

PRESENTACIÓN

El presente texto forma parte de un conglomerado en preparación que comprende, Matemática para primer y segundo año de bachillerato, técnico medio en comercio y técnico medio en administración de las especialidades contabilidad e informática. Se ha elaborado en base a la necesidad de un texto adecuado a aquellos estudiantes que aspiran ingresar al Subsistema de Educación Universitaria con un enfoque teórico práctico, donde sin dejar de perder el rigor matemático su centro es la aplicación de procedimientos de la asignatura en situaciones de aprendizaje individual o colectivo, en o fuera del aula.

Se pretende con esta obra, lograr un desarrollo integral en el campo del saber y del poder matemático; es decir, a partir de un consistente sistema de conocimientos, se encauza hacia su aplicación práctica, mediante ejercicios y problemas organizados sistemáticamente y que tienden, al desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes, de manera que se contribuya a una formación matemática que sirva de base a estudios posteriores, así como también para una inserción adecuada al mundo laboral.

Los temas que conforman esta obra son: Fundamentos de lógica matemática, Números complejos, Sucesiones y series, presentados en cuatro capítulos.

El Capítulo I, se dedica a la revisión de los fundamentos de lógica matemática, disponiendo los principales elementos del trabajo con juicios (proposiciones) y razonamientos en base a las inferencias lógicas. Su presentación está concebida para permitir al estudiante el desarrollo del pensamiento lógico, que contribuya a mejorar su forma de pensar, y aunque “La lógica no resulta imprescindible para pensar, pero si contribuye a un pensamiento que se acerque mucho más a la realidad.”

El Capítulo II, presenta la noción de conjunto que da paso a aspectos fundamentales de la Teoría de Conjuntos, y que conlleva a la ejecución de operaciones de unión, intersección, entre otras; realizables con elementos del ya definido conjunto.

El Capítulo III, trata la conceptualización de número real dada la clasificación de conjuntos numéricos y su representación en la denominada recta numérica. Tomando a los números reales, en este apartado se realizan operaciones que permiten la simplificación de símbolos de agrupación, siguiendo un orden para las mismas.

En el Capítulo IV, se fundamenta la razón de ampliar los conjuntos numéricos conocidos, dada la imposibilidad de poder determinar las raíces pares de números negativos, lo cual fundamenta la entrada de los Números Complejos. Se revisa la representación binómica de los complejos, sus operaciones y cálculo, la definición complejos conjugados, el módulo y su representación en la recta numérica.

En el Capítulo V, se presenta lo relativo al concepto de ecuación e inecuación. En su estructura se presentan conceptos de importancia para la definición tanto de ecuación como de inecuación y las formas más usuales para resolver de las mismas, dada la clasificación lineal y cuadrática; así también, se presenta el denominado sistema de ecuaciones lineales con más de una incógnita y los principales métodos que permiten determinar los valores de dichas incógnitas.

El Capítulo VI, corresponde a matrices desarrollándose las operaciones con matrices como: suma, diferencia, multiplicación por un escalar de una matriz y multiplicación de matrices; luego de haberse definido y denotado una matriz, así como también una pequeña clasificación de la amplitud representada por las mismas.

El Capítulo VII, trata sobre la definición de triángulo para tener una concepción sobre trigonometría, sus razones trigonométricas, sus funciones y valores usuales en la resolución de problemas.

El Capítulo VIII, se dedica al estudio de las sucesiones y progresiones, donde se determina los conceptos de sucesión y término general, centrándose específicamente en las progresiones aritméticas y las geométricas. También analizaremos la aplicación de las progresiones, que permitirá al estudiante que tipo de progresión utilizar acorde a la necesidad del problema. En el desarrollo de cada capítulo se presentan ejemplos resueltos que ilustran los contenidos expuestos, así como los procedimientos de cálculo y las principales interpretaciones y justificaciones del trabajo; al final de cada epígrafe y de cada capítulo se propone a los estudiantes una serie de actividades (incluyendo tres talleres) que integran lo cognitivo y lo procedimental, contribuyendo con su realización al desarrollo de las habilidades y competencias necesarias para la asignatura. La bibliografía al final de la obra permitirá a profesores y estudiantes realizar, si así lo desean, una ampliación de los temas planteados.

En el diseño de cada página, se puede advertir lo abierto y lo ordenado, a través de los distintos tipos y tamaños de letras, cuadros e identificadores de situaciones concretas; para que el estudiante pueda distinguir de manera clara, los títulos de subtítulos, una sección de otra, ejemplos y soluciones, conceptos relevantes en el texto, ejercicios propuestos y talleres.

Tenemos la plena confianza que el libro que presentamos contribuirá a cumplir el objetivo educativo para el que fue creado, a su vez que agradecemos profundamente a todos aquellos, profesores y estudiantes, que nos hagan llegar sus observaciones en razón de mejorarlo.

Los Autores.

CONTENIDO

PRESENTACIÓN.....13

CAPÍTULO I. FUNDAMENTOS DE LÓGICA

1.1 Elementos de Lógica.....15

1.2 Juicios, Proposiciones, Proposiciones matemáticas.....14

1.2.1 Juicio.....14

1.2.2 Proposición.....14

1.2.3 Proposiciones matemáticas.....17

1.2.4 Ejercicios propuestos.....18

1.3 Operaciones lógicas con proposiciones.....19

1.3.1 Generalidades.....19

1.3.2 Tablas de verdad para cada una de las operaciones lógicas.....20

1.3.2.1 Negación.....20

1.3.2.2 Disyunción.....21

1.3.2.3 Disyunción exclusiva.....21

1.3.2.4 Conjunción.....22

1.3.2.5 Conjunción negativa.....22

1.3.2.6 Condicional.....22

1.3.2.7 Bicondicional o equivalencia.....23

1.3.2.8 Ejercicios propuestos.....24

1.4 Clasificación de las proposiciones compuestas atendiendo a su valor de verdad.....26

1.4.1 Tautología.....26

1.4.2 Contradicción.....27

1.4.3 Dependiente o sintética.....28

1.4.4 Proposiciones lógicamente equivalentes.....28

1.4.5 Recíproco, contrarrecíproco y contraria de una implicación.....28

1.4.6 Ejercicios propuestos.....29

1.5 Leyes del álgebra de proposiciones.....30

1.5.1 Leyes.....30

1.5.2 Ejercicios propuestos.....32

1.6 Funciones proposicionales, cuantificadores.....34

1.6.1 Funciones proposicionales.....34

1.6.2 Cuantificadores.....35

1.6.2.1 Cuantificador universal.....35

1.6.2.2 Cuantificador existencial.....36

1.6.2.3 Negación de cuantificadores.....37

1.6.2.4 Ejercicios propuestos.....38

1.7 Reglas de inferencia.....39

1.7.1 Ejercicios propuestos.....42

CAPÍTULO II. CONJUNTOS

2.1. Teoría de conjuntos.....47

2.1.1 Definición y notación.....47

2.1.2 Operaciones con conjuntos.....48

2.1.3 Ejercicios propuestos.....49

CAPÍTULO III. NÚMEROS REALES

3.1 Definición de número real.....53

3.2 Representación gráfica de los números reales.....53

3.3	Aproximaciones por defecto y por exceso de números reales.....	54
3.3.1	Ejercicios propuestos.....	55
3.4	Operaciones con números reales.....	55
3.4.1	Ejercicios propuestos.....	58

CAPÍTULO IV. NÚMEROS COMPLEJOS

4.1	Introducción al estudio de los números complejos.....	61
4.2	Igualdad de números complejos.....	63
4.3	Operaciones con números complejos.....	63
4.3.1.	Ejercicios propuestos.....	65
4.4	Números complejos conjugados.....	68
4.5	Módulo de un número complejo.....	68
4.5.1	Ejercicios propuestos.....	69
4.6	Representación geométrica de los números complejos.....	71
4.6.1.	Ejercicios propuestos.....	72

CAPÍTULO V. ECUACIONES SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES E INECUACIONES

5.1	Conceptos básicos.....	75
5.1.1	Igualdad.....	75
5.1.2	Identidad.....	75
5.2	Definición de ecuación.....	76
5.2.1.	Elementos de una ecuación.....	76
5.2.2	Resolución de ecuaciones.....	77
5.3	Ecuaciones lineales y cuadráticas.....	78
5.3.1	Ecuación lineal.....	78
5.3.1.1	Definición.....	78
5.3.1.2	Resolución de ecuaciones lineales.....	79
5.3.1.3	Ejercicios propuestos.....	81
5.3.2	Ecuación cuadrática.....	82
5.3.2.1	Definición.....	82
5.3.2.2	Resolución de ecuaciones cuadráticas.....	83
5.3.2.3	Ejercicios propuestos.....	85
5.4	Sistemas de ecuaciones lineales.....	86
5.4.1	Definición.....	86
5.4.2	Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.....	87
5.4.3	Ejercicios propuestos.....	91
5.5	Inecuaciones lineales y cuadráticas.....	92
5.5.1	Conceptos básicos.....	92
5.5.1.1	Desigualdad.....	92
5.5.1.2	Intervalos.....	93
5.5.2	Definición de inecuación.....	94
5.5.2.1	Inecuación lineal.....	95
5.5.2.1.1	Resolución de una inecuación lineal.....	95
5.5.2.1.2	Ejercicios propuestos.....	96
5.5.2.2	Inecuación cuadrática.....	97
5.5.2.2.1	Resolución de una inecuación cuadrática.....	97
5.5.2.2.2	Ejercicios propuestos.....	99

CAPÍTULO VI. MATRICES

6.1	Definición de matriz.....	101
-----	---------------------------	-----

6.2	Notación de matriz.....	101
6.3	Tipos de matrices.....	101
6.4	Operaciones con matrices.....	103
6.4.1	Suma de matrices.....	103
6.4.2	Multiplicación de una matriz por un escalar.....	104
6.4.3	Diferencia de matrices.....	106
6.4.4	Producto de matrices.....	106
6.4.5	Ejercicios propuestos.....	108

CAPÍTULO VII. TRIGONOMETRÍA

7.1	Definición de triángulo.....	111
7.2	Razones trigonométricas.....	111
7.3	Identidades trigonométricas fundamentales.....	112
7.4	Funciones trigonométricas: Algunos valores especiales.....	112

CAPÍTULO VIII. SUCESSIONES Y PROGRESIONES

8.1	Definición de sucesión.....	115
8.1.1	Término de la sucesión.....	115
8.1.2	Tipos de sucesión.....	115
8.1.2.1	Sucesión finita.....	115
8.1.2.2	Sucesión infinita.....	116
8.1.2.3	Ejercicios propuestos.....	117
8.2	Fórmulas de recurrencia.....	117
8.2.1	Ejercicios propuestos.....	118
8.3	Determinación de términos generales.....	118
8.3.1	Ejercicios propuestos.....	119
•	Taller 1.....	119
8.4	Progresiones aritméticas.....	120
8.4.1	Definición.....	120
8.4.1.1	Ejercicios propuestos.....	121
8.4.2	Término enésimo de una progresión aritmética.....	121
8.4.2.1	Ejercicios propuestos.....	123
8.4.3	Construcción de progresiones aritméticas.....	123
8.4.3.1	Ejercicios propuestos.....	124
8.4.4	Media aritmética.....	125
8.4.4.1	Ejercicios propuestos.....	125
8.4.5	Series aritméticas.....	127
8.4.6	Notación sigma.....	129
8.4.6.1	Ejercicios propuestos.....	130
•	Taller 2.....	131
8.5	Progresiones geométricas.....	132
8.5.1	Definición.....	132
8.5.1.1	Ejercicios propuestos.....	133
8.5.2	Término enésimo de una progresión aritmética.....	134
8.5.2.1	Ejercicios propuestos.....	136
8.5.3	Construcción de progresiones geométricas.....	136
8.5.3.1	Ejercicios propuestos.....	137
8.5.4	Interés compuesto.....	137
8.5.4.1	Ejercicios propuestos.....	139
8.5.5	Media geométrica.....	140
8.5.5.1	Ejercicios propuestos.....	142

8.5.6	Series geométrica.....	142
8.5.6.1	Ejerciciospropuestos.....	145
8.5.6.2	Series geométricas infinitas.....	145
8.5.6.2.1	Ejercicios propuestos.....	147
8.5.6.2.2	Determinación de sumas de una serie geométrica infinita.....	148
8.5.6.2.3	Ejercicios propuestos.....	150
•	Taller 3.....	151

BIBLIOGRAFÍA

CAPÍTULO I.

FUNDAMENTOS DE LÓGICA

1.1 ELEMENTOS DE LÓGICA

En el presente capítulo solo abordaremos los fundamentos de la lógica clásica bivalente y se dan elementos relacionados con la lógica matemática, lo que permitirá la mejor comprensión de los teoremas, y en general un mejor trabajo con las proposiciones matemáticas.

La palabra lógica proviene del griego “logos” que significa idea, palabra, razón, razonamiento. La lógica no resulta imprescindible para pensar, pero contribuye a que el pensamiento se acerque mucho más a la realidad.

La lógica es la ciencia que estudia el pensamiento desde el punto de vista de su estructura, es decir se ocupa de las formas lógicas del pensamiento, por ello que se denomina en ocasiones lógica formal.

La Lógica: Es la ciencia que se encarga del estudio de los métodos y principios usados para distinguir los razonamientos correctos (o válidos) de los incorrectos (o no válidos). Con ayuda de una notación artificial (simbólica) y un método rigurosamente educativo.

Como formas lógicas del pensamiento se consideran:



FORMAS LÓGICAS DEL PENSAMIENTO	
CONCEPTOS	Formas de reflejar los objetos o clases de objetos.
JUICIOS	Formas de relación entre los objetos.
RAZONAMIENTOS	Formas de obtener un conocimiento nuevo inferido a partir de otro.

El estudio de las leyes de la lógica habitúa a encontrar el sentido exacto de las palabras y oraciones empleadas para expresarse, ayuda a descubrir errores y a comprobar el propio pensamiento cuando se obtiene un conocimiento inferido mediante una demostración.

La lógica clásica bivalente se basa en cuatro leyes fundamentales que exponemos a continuación:

LEYES FUNDAMENTALES DE LA LOGICA CLÁSICA BIVALENTE

Ley de Identidad	Todo juicio es idéntico a si mismo
Ley de Contradicción	En dos juicios, uno donde se niega algo sobre algo y en otro donde se afirma algo sobre lo mismo que se negó anteriormente en un mismo tiempo, no pueden ser verdaderos simultáneamente.
Ley del Tercero Excluido	Un juicio es verdadero o es falso, no cabe otra alternativa.
Ley de la Razón Suficiente	Para aceptar un juicio como cierto, este ha de ser demostrado mediante los conocimientos establecidos por la ciencia que se trate y por las leyes de la lógica.

1.2 JUICIOS, PROPOSICIONES, PROPOSICIONES MATEMÁTICAS

1.2.1 Juicio: Podemos considerar que un juicio no es más que un pensamiento donde se afirma o niega algo sobre algo.

Los Juicios, según su contenido expresan deseos, ordenes, preguntas, entre otros.

EJEMPLO 1

Son juicios:

- a) Todo hombre es mortal. (Juicio atributivo, categórico o simple)
- b) Ningún triángulo es un cuadrado. (Juicio atributivo, categórico o simple)
- c) Hay un número natural menor que todos los demás. (Juicio existencial)
- d) En el departamento de matemática hay más profesores que profesoras. (Juicio de relación)

Llamaremos **VALOR DE VERDAD** de un juicio a las categorías **VERDADERO O FALSO**, según el juicio se ajuste o no a la realidad.

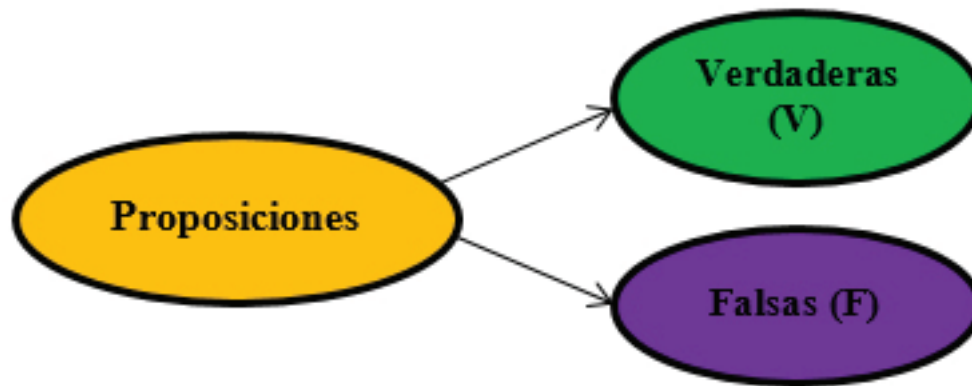
De acuerdo a la ley del tercero excluido, mencionada anteriormente, un juicio es verdadero o falso, y no cabe otra alternativa.

La lógica se interesa por el juicio declarativo cuyo contenido permite determinar si es verdadero o falso.

1.2.2 Proposición: Una proposición no es más que un juicio, es decir es una oración o frase donde se afirma o niega algo sobre algo.

Su valor de verdad se caracteriza al igual que los juicios por ser **VERDADERO O FALSO**.

Una proposición es todo juicio declarativo, del cual se puede decidir si su contenido es verdadero o falso; excluyendo la posibilidad que sea simultáneamente verdadero o falso.



EJEMPLO 2

Son proposiciones los juicios presentados en el ejemplo 1.

No son proposiciones:

¡Hola!

¿Qué hora es?

1.2.3. Proposiciones matemáticas.

Una proposición matemática es simplemente una afirmación o negación de propiedades de entes matemáticos y relaciones, interacciones, nexos, dependencias, entre estos, que tiene un valor de verdad.

Las proposiciones en general se simbolizan por las letras minúsculas, p, q, r ..

Para representar proposiciones, la lógica proposicional utiliza las letras minúsculas: p, q, r, s, t,... A estas letras se les denomina variables proposicionales. Cada una de ellas representa un enunciado.

EJEMPLO 3

Son proposiciones matemáticas:

a) p: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°

b) q: 6 es un número primo

Las proposiciones pueden clasificarse en simples o compuestas, atendiendo a la siguiente división:

CLASIFICACIÓN DE LAS PROPOSICIONES

Proposiciones Simples:	No pueden descomponerse en proposiciones más elementales y su valor de verdad se infiere directamente del conocimiento de los conceptos que en ella intervienen y las relaciones ya establecidas.
Proposiciones Compuestas:	Si a partir de proposiciones simples formamos enlaces de proposiciones, utilizando los llamados conectivos lógicos: no o y ni...ni Si...entonces... Si y solo si, Se obtienen las llamadas proposiciones compuestas cuyo valor de verdad depende tanto del tipo de conectivo lógico empleado, como de los valores de verdad de las proposiciones que intervienen.

EJEMPLO 4

Son proposiciones simples, las presentadas en el ejemplo 3.

Son proposiciones compuestas:

- a) p: 2 es un número par y primo
- b) q: 12 es un número par o impar
- c) Si a es un número primo entonces a es impar
- d) Un número a es primo si y solo si a es impar

1.2.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Indique si los siguientes enunciados corresponden o no a proposiciones. En caso de ser una proposición indique su valor de verdad

a) $3+8 = 11$	
b) Ayúdenme, por favor	
c) Existe una solución entera para la ecuación $x + 3 = 6$	
d) Las mesas son rectangulares	
e) El estudio de la lógica es importante	
f) ¿Cómo estás?	
g) La raíz cuadrada de cualquier número real está perfectamente definida.	
h) Hasta luego	

2.- Escriba cinco proposiciones matemáticas.

3.- Escriba cinco no proposiciones.

4.- En un curso está matriculado José y todos los estudiantes de ese curso rinden una evaluación de matemáticas. Al día siguiente el profesor en vez de dar todas las notas dice que los reprobados son Raúl y Pedro. ¿José está aprobado en esa evaluación? ¿Qué ley lógica se aplica aquí?

--

1.3 OPERACIONES LÓGICAS CON PROPOSICIONES.

1.3.1 Generalidades

Operación Lógica: Los enlaces de dos o más proposiciones empleando los conectivos lógicos y que como resultado se obtiene una proposición única se denomina operación lógica con proposiciones.

Consideramos también el proceso de negación de una proposición como una operación lógica y para su estudio clasificaremos la proposición resultante como una proposición compuesta.

Mediante el siguiente cuadro guía, presentamos un resumen de las operaciones lógicas con proposiciones para el caso en que intervengan una o dos proposiciones destacando en el la simbología que utilizaremos, y que posteriormente las definiremos atendiendo a su valor de verdad.

Sean p, q dos proposiciones simples:

Nombre de la Operación Lógica	Proposiciones que Intervienen	Escritura	Simbología
Negación	p	no p	$\sim p$
Disyunción	p, q	$p \vee q$	$p \vee q$
Disyunción exclusiva	p, q	$p \vee q$, pero no ambos	$p \vee q$
Conjunción	p, q	$p \wedge q$	$p \wedge q$
Conjunción negativa	p, q	Ni p ni q	$p \wedge q$

Condicional	p, q	Si p entonces q	$p \rightarrow q$
Bicondicional	p, q	P si y solo si q	$p \leftrightarrow q$

Conectivos u Operadores Lógicos: Son palabras que se utilizan para relacionar o combinar proposiciones simples, originando una proposición compuesta. A excepción del “no” que por ser un conectivo unitario no conecta dos proposiciones sino que niega una proposición.

1.3.2 Tablas de Verdad para cada una de las operaciones lógicas.

Tabla de Verdad: Una tabla de verdad es una matriz, que nos permite resumir el resultado de las operaciones lógicas entre proposiciones.

Si n es la cantidad de proposiciones que intervienen en una cierta operación lógica, entonces la cantidad de combinaciones posibles será 2^n

Detallaremos ahora cada una de estas operaciones lógicas representándolas mediante una matriz o tabla de verdad, donde los valores de Verdad son Verdadero (V) o Falso (F). En algunos casos se acepta plantear que se simbolicen los valores de verdad de la siguiente forma:

Verdadero: (1)

Falso: (0)

Para construir la matriz de una tabla de verdad o certidumbre seguimos los siguientes pasos:

1) Se determina el número de variables que intervienen en el polinomio.

2) Se aplica la regla 2^n (para determinar el número de filas de la tabla), donde: la base, 2 representa el número de posibles valores veritativos de la variable, es verdadera o es falsa.

Y el exponente “n” es el número de variables.

3) Se le asignan valores a la variable, planeando todas las posibles combinaciones.

1.3.2.1 Negación

La negación de una proposición p , simbolizada por $\sim p$ (no p) es otra proposición, que es verdadera si p es falsa y falsa si p es verdadera.

Como en el caso de la negación interviene una sola proposición, entonces la cantidad de combinaciones o casos posibles será de:

$$2^1 = 2$$

Así la tabla de verdad de la negación será:

p	~p
V	V
F	F

Y aplicando la otra simbología sería:

p	~P
1	0
0	1

1.3.2.2 Disyunción

La disyunción entre dos proposiciones p , q , denotada por $(p \vee q)$ (p o q), se define con relación a su valor de verdad de la siguiente forma: su valor es verdadero si al menos una de las proposiciones que intervienen es verdadera.

Opuesto a como se utiliza en la vida diaria, la disyunción “o” tiene en lógica un carácter inclusivo, es decir p o q es verdadera, incluye el caso en que ambas proposiciones sean verdaderas simultáneamente.

De lo anterior resulta la tabla de verdad para la disyunción que para el caso de dos proposiciones encontraremos:

$$2^2 = 4$$

Así:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.3.2.3 Disyunción Exclusiva

La disyunción exclusiva entre dos proposiciones p y q denotada por $p \vee q$, se define como verdadera si las proposiciones que intervienen p , q , tienen diferente valor de verdad.

p	q	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.3.2.4 Conjunción

La conjunción entre dos proposiciones p y q , denotada por $p \wedge q$, es verdadera solo en el caso que sean verdaderas ambas proposiciones simultáneamente y falsa en cualquier otro caso.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.3.2.5 Conjunción negativa

La conjunción negativa de dos proposiciones p , q , denotada por $p \downarrow q$, es verdadera únicamente cuando ambas proposiciones son falsas y falsas en cualquier otro caso

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.3.2.6 Condicional

La implicación o condicional es a no dudarlo una de las mas importantes operaciones lógicas entre proposiciones, ya que en el estudio de la Matemática, una gran parte de los teoremas pueden ser expresados en forma de implicación o condicional.

Si p , q , son dos proposiciones, la proposición compuesta $p \rightarrow q$ (p implica q) puede expresarse también como:

- a) Si p entonces q
- b) P es suficiente para q
- c) Q es necesario para p
- d) P es la premisa o antecedente, q es la tesis o conclusión

La implicación o condicional es falsa solo en el caso que p (premisa) sea verdadera y q (conclusión) sea falsa., y en todos los demás casos resulta verdadera.

La tabla de verdad correspondiente, se expone a continuación:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

EJEMPLO 5

Sean las proposiciones:

p: El triángulo ABC es equilátero

q: El triángulo ABC es isósceles

Interpretemos que significa $p \leftrightarrow q$

a) Si el triángulo ABC es equilátero entonces el triángulo ABC es isósceles

b) Triángulo ABC equilátero implica triángulo ABC isósceles

c) Que el triángulo ABC sea equilátero es suficiente para que el triángulo ABC sea isósceles

d) Que el triángulo ABC sea isósceles es necesario para que el triángulo ABC sea equilátero.

1.3.2.7 Bicondicional o equivalencia

La equivalencia o bicondicional resulta ser, al igual que el condicional, una operación lógica de mucha importancia, para el tratamiento de teoremas matemáticos.

Sean p, q dos proposiciones. La proposición compuesta denotada por $p \leftrightarrow q$, puede expresarse como:

a) p si y solo si q (en algunos textos encontramos p si q)

b) p es necesario y suficiente para q

c) q es necesario y suficiente para p.

La equivalencia o bicondicional es verdadera en el caso que lo sean simultáneamente la implicación $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$.

Vamos a confeccionar la tabla de verdad, basados en la afirmación anterior:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Podemos comprobar entonces que la equivalencia $p \leftrightarrow q$ es verdadera, solo en el caso que ambas proposiciones tengan el mismo valor de verdad, es decir:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

EJEMPLO 6

Sean:

$$P: x = 0$$

$$Q: x^2 = 0$$

Interpretemos el significado de $p \rightarrow q$

a) $x = 0$ si y solo si $x = 0$

b) $x = 0$ es una condición necesaria y suficiente para que $x = 0$

c) $x = 0$ es una condición necesaria y suficiente para que $x = 0$

1.3.2.8 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Sean las proposiciones:

p: hace frío

q: está lloviendo

Dé una frase verbal sencilla que describa cada una de las siguientes proposiciones:

$\sim p$	
$p \wedge q$	
$p \vee q$	
$p \rightarrow q$	
$q \rightarrow p$	
$\sim (\sim q)$	

2.- Sean las proposiciones:

r: es el estudiante

s: el está en clases

Escriba cada uno de los siguientes enunciados en forma simbólica, utilizando r y s.

a) El es estudiante y está en clases.	
b) El es estudiante y no está en clases.	
c) Es falso que, el no es estudiante o el está en clases.	
d) El ni es estudiante ni está en clases.	
e) El es estudiante o, no es estudiante y está en clases.	
f) No es cierto que el no es estudiante o el no está en clases.	
g) Pedro es estudiante y Luis es ingeniero.	

h) Si los cuadrados tienen tres lados, entonces los triángulos tienen cuatro lados.	
---	--

3.- Conteste y justifique su respuesta:

a) Si $p \wedge q$ es verdadero. ¿ p es verdadero?	
b) Si q es verdadero. ¿ $p \wedge q$ es verdadero?	
c) Si p es verdadero. ¿ $p \wedge \sim p$ será verdadero?	
d) ¿Cuál será el valor de verdad de $\sim q \vee q$?	
e) Si $\sim(p \vee q)$ es verdadero. ¿ $p \rightarrow q$ es verdadero?	
f) Si p es válida y $p \wedge q$ es falsa. ¿Cuál es el valor de verdad de q ?	
g) ¿ $p \vee p$, es siempre verdadero?	
h) Si $p \vee q$ es verdadera. Podemos concluir que p es verdadera?	
i) Si q es verdadera, ¿Podemos concluir que $p \vee q$ lo es?	
j) ¿Qué debemos demostrar para probar que $(p \wedge q) \vee r$ es falsa?	
k) Si $p \wedge q$ es válido entonces ¿ $p \vee q$ es válido?	
l) ¿Podemos deducir de $\sim(p \vee q)$ que $\sim p \vee \sim q$ es verdadera?	
m) Si $p \rightarrow q$ es verdadera. ¿Será p verdadera?	
n) Si q es falsa. Entonces, ¿ $p \rightarrow q$ es verdadera?	
o) Si $p \rightarrow q$ es verdadera, entonces ¿ q es verdadera?	
p) Si $p \rightarrow q$ es verdadera, entonces ¿ $q \rightarrow p$ es verdadera?	
q) Si $\sim p$ entonces ¿ $p \rightarrow q$ es verdadero?	
r) Si $p \wedge p \rightarrow q$ es verdadero. ¿ q será verdadera?	
s) Si q es verdadera, entonces ¿ $p \rightarrow q$ lo será?	
t) Si $p \rightarrow q$ es válido y $q \rightarrow p$ es válido, entonces...	
u) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ es válido, $\sim r$ válido y q falso. ¿ p es falso?	

4.- Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones mediante la construcción de cada una de las tablas de verdad.

a) $[(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q]$	
b) $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$	
c) $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	
d) $\sim[(p \rightarrow q) \vee (\sim p \wedge q)] \rightarrow p$	
e) $[(p \leftrightarrow r) \vee (\sim q \vee r)] \vee [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q)]$	

5.- Dada la proposición:

$$[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \rightarrow [(p \wedge q) \wedge (p \vee \sim r)]$$

Diga cuál es el valor de verdad para cada uno de los siguientes casos:

a) p falso, q falso, r falso	
b) p falso, q falso, r verdadera	
c) p verdadero, q falso, r verdadera	

6.- Para los problemas siguientes considere:

p: 2 divide a 10

q: 8 es múltiplo de 3

r: 17 es un número primo.

Observe que p y r son verdaderas, pero q es falsa. Escriba las siguientes proposiciones en forma simbólica y determine en cada caso si la proposición es verdadera o falsa.

a) 2 divide a 10 y 8 es múltiplo de 3	
b) 8 no es múltiplo de 3	
c) 8 es múltiplo de 3 y 17 es un numero primo o 2 no divide a 10	
d) 2 no divide a 10 ni 17 es un número primo	
e) Si 2 divide a 10 y 8 no es múltiplo de 3, entonces ni 2 divide a 10 ni 17 es un número primo	

1.4 CLASIFICACIÓN DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS ATENDIENDO A SU VALOR DE VERDAD.

1.4.1 Tautología

Si una proposición formada a partir de ciertas proposiciones dadas, sin importar su valor de verdad, es siempre verdadera, se dice que esa proposición es una tautología.

EJEMPLO 7

Probar que la proposición $p \rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.

Construyamos la tabla de verdad correspondiente, compuesta por cuatro alternativas.

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

1.4.2 Contradicción

Si una proposición formada a partir de ciertas proposiciones dadas, no importa su valor de verdad, es siempre falsa, se dice que esa proposición es una contradicción.

EJEMPLO 8

Probar que la proposición $(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$ es una contradicción.

Construyamos la tabla de verdad correspondiente.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	F



Comprueba utilizando los ejemplos anteriores que:

- La negación de una tautología es una contradicción.
- La negación de una contradicción es una tautología.

1.4.3 Dependiente o sintética

Una proposición es dependiente o sintética cuando no es ni tautología ni contradicción, es decir cuando toma valores de verdad, verdaderos en algunos casos y falsos en otros, dependiendo de los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

EJEMPLO 9

Probar que la proposición $q \vee (r \wedge s)$ es una proposición dependiente o sintética.

q	r	s	$r \wedge s$	$q \vee (r \wedge s)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

1.4.4 Proposiciones lógicamente equivalentes

Dos proposiciones son lógicamente equivalentes si al desarrollar el bicondicional entre ellas, se obtiene una tautología.

Si H y G son dos proposiciones lógicamente equivalentes, se simboliza por:

$$H \equiv G.$$



Probar que $(p \vee q) \equiv \sim (\sim p \wedge \sim q)$

1.4.5 Recíproco, contrarecíproco y contraria de una implicación

Si a partir de la implicación $p \rightarrow q$, podemos formar, la implicación $q \rightarrow p$ esta última recibe el nombre de **implicación recíproca** de $p \rightarrow q$, con la característica que no necesariamente será una implicación verdadera y que en general no serán lógicamente equivalentes las proposiciones $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$

Ahora, si de la implicación $p \rightarrow q$, formamos la implicación $\sim q \rightarrow \sim p$, llamaremos a esta última contrarecíproco de la primera con la característica que ambas implicaciones son lógicamente equivalentes, es decir: $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$,

Por último la contraria de la implicación $p \rightarrow q$, resulta ser $\sim p \rightarrow \sim q$, que en general no se cumple si se cumple $p \rightarrow q$, por lo que ambas proposiciones no son lógicamente equivalentes.

Podemos resumir lo tratado utilizando la siguiente gráfica,



1.4.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Determine si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o son dependientes.

a) $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$	
b) $p \rightarrow (p \vee q)$	
c) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$	
d) $[(\sim p \vee p) \vee (q \vee \sim q)] \wedge (\sim p)$	
e) $(p \uparrow q) \wedge (p \vee q)$	
f) $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow s)] \rightarrow (r \vee s)$	

2.- Comprobar, mediante sus tablas de verdad que las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes:

- a) $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$
- b) $(p \vee q) \equiv (p \vee q) \wedge [\sim (p \wedge q)]$
- c) $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$
- d) $(p \leftrightarrow q) \uparrow q \equiv (p \rightarrow q)$
- e) $(p \vee q) \uparrow p \equiv \sim(\sim p \rightarrow q)$

3.- Trabajamos con la implicación $p \rightarrow (p \vee q)$ y elabore las tablas de verdad de la recíproca y la contrarrecíproca y compare los valores de verdad con la implicación dada.

4.- Dado el teorema T: Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

- a) Escribe T de la forma “Si p entonces q”
- b) Escribe el teorema recíproco y el contrarecíproco y analiza el valor de verdad de cada uno de ellos.

5.- Sea el teorema D: “La suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es siempre divisible por 9.”

- a) Enuncie el teorema D de la forma “Si p entonces q”
- b) Determine los teoremas recíproco, contrarecíproco y contrario y establezca su valor de verdad.

6.- Considere el conectivo * definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

$p * q$: p incompatible con q

a) Determine la proposición:

$$[(p \rightarrow q) \vee q] \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) * (\sim q)]$$

1.5 LEYES DEL ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES

Presentamos las siguientes equivalencias lógicas que se consideran como Leyes; se las utiliza para simplificar proposiciones compuestas y demostrar otras equivalencias lógicas, así como para desarrollar habilidades en el manejo de conectivos lógicos.

Las leyes del algebra de proposiciones, son equivalencias que el lector puede demostrar aplicando la definición: Dos formas proposicionales $P(p, q, r, \dots)$ y $Q(p, q, r, \dots)$ son equivalentes, si tienen idénticas las columnas finales de sus tablas de verdad.

Para su estudio las hemos clasificado en los siguientes grupos:

1.5.1 Leyes

Leyes de Idempotencia

$$p \wedge p \equiv p$$

$$p \vee p \equiv p$$

Leyes Asociativas

$$(p \wedge q \wedge r) \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

$$(p \vee q \vee r) \equiv p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

Leyes Conmutativas

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

Leyes Distributivas

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Leyes De Morgan

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

Leyes de Complemento

$$p \vee \sim p \equiv V$$

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

$$\sim V \equiv F$$

$$\sim F \equiv V$$

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

Leyes de Identidad

$$p \wedge V \equiv p$$

$$p \vee V \equiv V$$

$$p \wedge F \equiv F$$

$$p \vee F \equiv p$$

Absorción

$$P \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$P \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Bicondicional

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Contrareciproco

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p,$$

1.5.2 Aplicación de las leyes a demostraciones.

EJEMPLO 10

Demostrar que:

$$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$$

Solución:

$$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \quad \text{Condicion Inicial}$$

$$(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)'' \quad \text{De Morgan}$$

$$\sim p \wedge (\sim q \vee q) \quad \text{Distributiva}$$

$$\sim p \wedge V \quad \text{Complemento}$$

$$\sim p \quad \text{Identidad}$$

EJEMPLO 11

Simplificar:

$$p \rightarrow (q \vee p)$$

Solución:

$$p \rightarrow (q \vee p) \quad \text{Condicion Inicial}$$

$$\sim p \vee (q \vee p) \quad \text{Condicional}$$

$$\sim p \vee q \vee p \quad \text{Asociativa}$$

$$\sim p \vee p \vee q \quad \text{Conmutativa}$$

$$(\sim p \vee p) \vee q \quad \text{Asociativa}$$

$$V \vee q \quad \text{Complemento}$$

$$V \quad \text{Identidad}$$

1.5.2 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Demuestre que:

$$a) \sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$b) \sim(p \uparrow q) \equiv p \vee q$$

$$c) \sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

$$d) (p \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee p) \equiv p \vee \sim(q \vee r)$$

$$e) (p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

$$f) p \uparrow p \equiv \sim p$$

$$g) [\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)] \equiv \sim p$$

$$h) \sim(p \vee q) \wedge \sim p \equiv \sim(\sim p \rightarrow q)$$

$$i) \sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$$

$$j) p \rightarrow \sim q \equiv q \rightarrow \sim p$$

$$k) [(p \wedge \sim q) \rightarrow r] \equiv [\sim p \vee (q \vee r)]$$

$$l) (p \leftrightarrow q) \uparrow q \equiv \sim(p \rightarrow q)$$

$$m) (p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$$

$$n) (p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

$$o) p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge \sim r) \rightarrow \sim q$$

$$p) p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

$$q) \sim(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p \leftrightarrow q) \equiv (p \leftrightarrow \sim q)$$

2.- Demostrar que las siguientes relaciones son implicaciones lógicas: (Para demostrarlo se deben realizar las transformaciones correspondientes aplicando las leyes estudiadas, hasta llegar a la conclusión que es verdadera (V) la implicación).

$$a) [(\sim p \vee q) \wedge p] \rightarrow q$$

$$b) (p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$$

3.- Simplificar las siguientes expresiones:

$$a) p \vee (p \wedge q)$$

$$b) (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$$

$$c) (p \wedge q) \rightarrow \sim p \uparrow \sim q$$

$$d) \sim(q \vee p) \wedge \sim(p \vee g)$$

$$e) (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$f) [(p \rightarrow q) \rightarrow r] \wedge (\sim q \wedge p)$$

$$g) [(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \vee p)] \vee [(\sim q \rightarrow p) \vee \sim p]$$

$$h) [(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow p$$

$$i) (\sim p \vee q) \vee (\sim q \vee \sim p)$$

$$j) \sim(p \vee q) \vee (p \wedge \sim q)$$

$$k) p \rightarrow (q \vee p)$$

$$l) (p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

$$m) p \rightarrow (q \vee p)$$

$$n) [(p \wedge q) \vee \sim q] \wedge [(p \wedge q) \vee q] \vee (p \wedge q \wedge r)$$

4.- Establecer las proposiciones asociadas a los siguiente numerales y determinar utilizando las leyes del álgebra de proposiciones, su valor de verdad:

a) Si estudio no perderé matemáticas; si no juego básquet entonces estudio, pero perdí matemáticas, por lo tanto no jugué básquet.

b) Ana o María están en Quito y si María está en Quito entonces Carlos está en Guayaquil, pero Ana no está en Quito, luego Carlos está en Guayaquil.

c) Si trabajo no puedo estudiar, pero o trabajo o paso matemáticas y pasé matemáticas por lo tanto estudié.

d) Si 6 es par, entonces 2 no divide a 7, o 5 no es primo, o 2 divide a 7. Pero 5 es primo.

e) Si se tiene un triángulo equilátero, sus lados son iguales. Si dos lados de un triángulo son iguales, dos de sus ángulos son iguales. Entonces, si el triángulo es equilátero, dos de sus ángulos son iguales.

1.6 FUNCIONES PROPOSICIONALES, CUANTIFICADORES

1.6.1 Funciones proposicionales

Hemos definido las proposiciones, como una oración o frase donde se afirma o niega algo sobre algo, y en la que es posible determinar sin ambigüedad su valor de verdad. Sin embargo existe propiedades matemáticas generales que no se enuncian en forma de proposiciones sino en forma de expresiones que contienen variables y que se convierten en proposiciones al sustituir estas por un valor constante perteneciente a un determinado conjunto prefijado de antemano al que llamaremos Dominio Básico.

EJEMPLO 12

Si tenemos la expresión:

$P(n) = n^2 < 2n$,no es una proposición porque no podemos determinar si es verdadera o falsa, solo hasta después de sustituir la variable n por un número natural concreto.

Así por ejemplo:

$P(1) = 1^2 < 2^2$ es verdadera, mientras que:

$P(3) = 3^2 < 2^3$ es FALSA.

Luego $P(n)$ no es una proposición, sino la forma común de todas las proposiciones que se obtienen si la variable n se sustituye por cada uno de los números naturales.

Las formas proposicionales de este tipo en ocasiones son llamadas funciones proposicionales, porque a cada elemento de su dominio básico, asocian una proposición y se representan de la forma $P(x)$ donde x es la variable que se encuentra en la expresión.

Es fundamental en una función proposicional, sustituir la variable sólo por los símbolos pertenecientes a su dominio básico. Para otros objetos, la función proposicional no está definida, de la misma forma que una función numérica, está definida solo para los números que pertenecen a su dominio.

En analogía con las funciones que se estudian en matemática, las funciones proposicionales pueden ser de una o varias variables.

EJEMPLO 13

Si a es primo entonces a es impar, es una función proposicional con una variable

$ab = 0$ si y solo si $a = 0$ o $b = 0$, es una función proposicional de dos variables.

1.6.2 Cuantificadores

Partiendo de las funciones proposicionales es posible obtener proposiciones universales y existenciales, mediante el uso del cuantificador universal (para todo...) y el cuantificador existencial (existe...)

1.6.2.1 Cuantificador Universal

Consideremos una función proposicional $P(x)$, definida sobre un dominio básico D y tal que la proposición $P(a)$ esté definida para cada $a \in D$.

Entonces podemos afirmar que:

Para todo $a \in D$ se cumple $P(a)$

De la misma forma podemos expresar que:

Cada $a \in D$ cumple $P(a)$

$P(y)$ para todo $y \in D$

Si $x \in D$ entonces $P(x)$

Las variables x , a , y son arbitrarias, pudiendo sustituirse por cualquier otra sin que la función proposicional pierda sentido.

Las proposiciones de este tipo reciben el nombre de proposiciones universales.

La última forma empleada nos permite destacar como una proposición universal puede adoptar la forma “si... entonces...”, quiere decir, que puede ser expresada como una implicación.

Cuando una proposición es universal utilizamos el cuantificador universal, expresado en la partícula “para todo” en dicha proposición.

En lógica formal se utiliza el símbolo $\forall$ para expresar el cuantificador universal.

La expresión:

$\forall x \in D$, se lee “Para todo los elementos x que pertenecen al conjunto D .”

En ocasiones se escribe también:

$\forall x, x \in D \rightarrow P(x)$, correspondiente a :

Si $x \in D$, entonces $P(x)$.

1.6.2.2 Cuantificador existencial

Consideremos ahora una proposición $P(x)$ definida sobre un dominio básico D , y tal que la proposición $P(a)$ esté definida para algún $a \in D$.

Entonces podemos afirmar que:

Existe $a \in D$ tal que se cumple $P(a)$

De la misma forma podemos expresar:

Existe un $x \in D$ con $P(x)$

Existe al menos un $x \in D$ tal que $P(x)$

Las variables utilizadas pueden ser sustituidas por cualquier otra.

Las proposiciones de este tipo, reciben el nombre de proposiciones existenciales o proposiciones particulares.

Cuando una proposición es existencial utilizamos el cuantificador existencial reflejado en la partícula “existe” en dicha proposición.

En lógica formal, se utiliza el símbolo $\exists$ para el cuantificador existencial.

La expresión $\exists x \in D$, se lee “existe un elemento x que pertenece al conjunto D ...”

EJEMPLO 14

Sea

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

La proposición $\exists x \in A$, tal que $P(x)$, es equivalente a:

$$P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

Luego, demostrar una proposición existencial, $\exists x \in A$, tal que $P(x)$, es determinar un $x \in A$ tal que $P(x)$ sea verdadero.

1.6.2.3 Negación de Cuantificadores

Una de las dificultades fundamentales que se confrontan al iniciar los estudios de Análisis Matemático, de Matemática Superior o de Cálculo, lo constituye la negación de cuantificadores.

Estudiaremos las reglas lógicas que rigen la negación de los cuantificadores “todos” y “existe”

- **Negación de proposiciones universales**

Sea la proposición:

$$\forall x \in D, P(x)$$

La negación de esta proposición sería:

$$\sim [\forall x \in D, P(x)] \leftrightarrow \exists x \in D, (\sim P(x))$$

Quiere esto decir, que basta probar que una proposición universal es falsa, que al menos exista un elemento del dominio básico dado, que no cumpla con la propiedad asignada, o sea hallar un $a \in D$, tal que no se cumpla $P(a)$. Un tal $a \in D$ que hace falsa $P(x)$, se denomina contraejemplo, por lo que para probar que:

$\forall x \in D, P(x)$, es falsa, basta con buscar un contraejemplo.

- **Negación de una proposición existencial**

Sea la proposición $\exists x \in D, P(x)$. Veamos que significa la proposición:

$$\sim [\exists x \in D, P(x)]$$

Si A es un conjunto finito:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Estudiamos anteriormente que si $\exists x \in D, P(x)$, significa que se cumple:

$$P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

Esta disyunción es falsa si y solo si:

$$\sim P(a_1) \vee \sim P(a_2) \vee \dots \vee \sim P(a_n)$$

Es verdadera y esto es equivalente a su vez a:

$$\forall x \in D, \sim P(x)$$

Generalizando esta equivalencia para conjuntos cualesquiera.

Si no existe $x \in A$, con la propiedad $P(x)$ entonces, $P(a)$ debe ser falso para todo $a \in A$ y recíprocamente.

Por lo tanto tenemos que:

$$\sim [\exists x \in D, P(x)] \leftrightarrow \forall x \in D, \sim P(x)$$

EJEMPLO 15

La proposición:

$$\sim [\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0] \leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sim (x^2 < 0) \leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \geq 0)$$

1.6.2.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) $\forall x \in \mathbb{N} (x^2 + 2x - 3 \neq 0)$
- b) $\exists x \in \mathbb{R} (x^2 \leq 0)$

2.- Sea $U = \{1, 2, 3, 4\}$ el conjunto universal. Determinar el valor de verdad de los siguientes enunciados.

- a) $\forall x \in U, (x^2 + 5 \geq 9)$
- b) $\forall x \in U, (x^2 - 16 \leq 1)$
- c) $\exists x \in U, (2x + 3 < 6)$
- d) $\exists x \in U, (3x^2 - x = 4)$

3.- Halle un contraejemplo para:

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

- a) $\forall x \in B, x$ es par
- b) $\forall x \in B \quad \forall y \in B (x^2 + y^2 < 12)$

**4.- Sea la función proposicional: x es mortal sobre el conjunto de los hombres
Utilice los cuantificadores universal y existencial en cada caso:**

- a) Todos los hombres son mortales
- b) Ningún hombre es mortal
- c) Existe un hombre inmortal
- d) Existe un hombre mortal

5.- Considerando el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) como universo, escriba en símbolos cada una de las siguientes expresiones:

- a) Todo número multiplicado por cero es igual a cero
- b) Todo número es menor o igual que si mismo
- c) Hay un número que es mayor o igual que todos los demás
- d) Si x es menor que 2, entonces es menor que cinco.
- e) Hay un número tal que su cuadrado es igual al número
- f) No hay ningún número que sea positivo y negativo a la vez

6. En forma simbólica escriba la negación de los enunciados anteriores.

7. Sea $P(x)$ una función proposicional, definida por:

$$P(x) = x^2 = 1$$

Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$
- b) $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, \sim P(x)$
- d) $\sim(\forall x \in \mathbb{R}), P(x)$
- e) $\exists x \in \mathbb{R}, \sim P(x)$

8. Negar la siguiente proposición:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (x+1 \neq 2)$$

1.7 REGLAS DE INFERENCIA

Una regla de inferencia nos permite pasar de una proposición verdadera a otra también verdadera, mientras que de una proposición falsa no se pueden extraer conclusiones,

Por la tabla de verdad de la implicación:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Nos damos cuenta que, si $p \rightarrow q$ es verdadera sucede que

- Si la premisa es verdadera, corresponde una conclusión verdadera
- Si la premisa es falsa, puede corresponder tanta una conclusión verdadera o una falsa.

Una regla de inferencia, es una regla que permite pasar formalmente de expresiones dadas, $P_1, P_2 \dots P_n$, a otra proposición Q .

Se dice entonces que Q se infiere de $P_1, P_2 \dots P_n$, o que se deduce Q de $P_1, P_2 \dots P_n$.

Es usual escribir una regla de inferencia en forma de esquema, que contiene “afirmaciones superiores” y una “afirmación inferior”, y las reglas de inferencia expresan el paso de unas a otras.

Algunas reglas de inferencia son:

a) Modus Ponendo Ponens (M.P.P) (Modo de afirmar afirmando)

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

b) Modus Tollendo Tollens (M.T.T) (Modo de negar negando)

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

c) Silogismo Hipotético (S.H) (Transitividad de la implicación)

$$\begin{array}{c} p_1 \rightarrow p_2 \\ p_2 \rightarrow p_3 \\ \dots \\ p_n \rightarrow p_{n+1} \\ \hline p_1 \rightarrow p_{n+1} \end{array}$$

d) Doble Negación (D.N)

$$\begin{array}{c} \sim(\sim p) \\ \hline p \end{array}$$

e) Adjunción (Adj.)

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline p \vee q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

f) Simplificación (Simpl.)

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

$$\frac{p \wedge q}{q}$$

g) Adición (Adic.)

$$\frac{p}{p \vee q}$$

$$\frac{q}{p \vee q}$$

h) Silogismo Deductivo (S.D)

$$\frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ q \rightarrow s \end{array}}{r \vee s}$$

EJEMPLO 16

Dadas las siguientes premisas obtener una conclusión:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow t \\ p \\ t \rightarrow s \end{array}$$

Resolución

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow t \\ p \end{array}}{\text{-----}}$$

$$\frac{t \quad \text{Modus Ponendo Ponens}}{t \rightarrow s}$$

$$\frac{\text{-----}}{s} \quad \text{Modus Ponendo Ponens}$$

EJEMPLO 17

Demostrar que:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow \sim q \\ q \vee \sim r \\ r \end{array}$$
$$\text{-----}$$
$$\sim p$$

Resolución:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow \sim q \\ \sim q \rightarrow \sim r \end{array}}{\text{-----}}$$
$$\text{Condicional}$$

$$\frac{\text{-----}}{p \rightarrow \sim r} \quad \text{Silogismo Hipotético}$$

$r \rightarrow \sim p$	Contrareciproco
r	

$\sim p$	Modus Ponendo Ponens.

1.7.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Complete las siguientes proposiciones:

$$\begin{array}{c}
 A \rightarrow B \\
 B \rightarrow H \\
 \hline
 C \rightarrow D \\
 P \rightarrow C \\
 \hline
 G \rightarrow H \\
 H \rightarrow R \\
 A \rightarrow G \\
 \hline
 \end{array}$$

2.- Dadas las siguientes premisas, obtener una conclusión.

a)

$$\begin{array}{c}
 \sim p \rightarrow q \\
 \sim(r \wedge p) \\
 s \rightarrow r \\
 s
 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{c}
 p \rightarrow q \\
 \sim r \wedge t \\
 \sim r \rightarrow q
 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{c}
 \sim t \\
 r \rightarrow (p \vee s) \\
 \sim(t \wedge q) \rightarrow r
 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{c}
 \sim p \vee q \\
 \sim(\sim p) \\
 s \leftrightarrow q
 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{c}
 p \downarrow q \\
 \sim q \rightarrow [s \wedge (r \vee p)]
 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{l} (q \vee \sim p) \rightarrow r \\ s \rightarrow (p \rightarrow q) \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ q \wedge \sim r \\ r \rightarrow s \end{array}$$

3.- Si estudio no perderé matemáticas; si no juego básquet entonces estudio, pero perdí matemáticas, por lo tanto no jugué básquet

Formulemos las proposiciones:

p: yo estudio

q: yo apruebo matemática

r: yo juego básquet

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim r \rightarrow p \\ \sim q \\ \hline \sim r \end{array}$$

Aplicando las reglas de inferencia:

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q & \\ \sim r \rightarrow p & \\ \hline \sim r \rightarrow q & \text{Silogismo Hipotético} \\ \sim q & \\ \hline \sim r & \text{Modus Tollendo Tollens} \end{array}$$

4.- Demostrar que los siguientes razonamientos son válidos:

a)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ (p \rightarrow r) \rightarrow \sim s \\ s \vee t \end{array}$$

t

b)

$$\begin{array}{l} \sim A \rightarrow B \\ C \rightarrow B \\ C \vee \sim A \\ \sim B \vee D \end{array}$$

D

c)

$r \rightarrow t$
 $s \rightarrow q$
 $(t \vee q) \rightarrow \sim p$
 $r \vee s$

 $\sim p$

d)

$p \rightarrow \sim q$
 $q \vee \sim r$
 r

 $\sim p$

e)

$\sim p \vee \sim q$
 $\sim q \rightarrow t$
 $\sim p \rightarrow t$
 $s \rightarrow \sim t$

 $\sim s$

f)

$p \vee \sim (q \vee \sim s)$
 $\sim p$

 s

g)

$q \rightarrow p$
 t
 $\sim p$
 $\sim q \wedge t \rightarrow \sim s$

 $\sim s$

h)

$t \vee (b \vee c)$
 $\sim t \rightarrow d$
 $(b \vee c) \rightarrow s$
 $\sim s$

 $d \vee r$

$$\begin{array}{l}
 \text{i)} \\
 \sim(p \wedge q) \\
 \sim p \rightarrow (q \rightarrow r) \\
 \sim q \rightarrow s \\
 \sim s \\
 \hline
 q \rightarrow r
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{j)} \\
 \sim(r \vee b) \\
 (\sim t \vee r) \vee b \\
 \hline
 \sim t
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{k)} \\
 p \vee r \\
 r \rightarrow s \\
 \sim t \rightarrow s \\
 \sim(p \wedge s) \\
 \hline
 t
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{l)} \\
 \sim s \rightarrow \sim(p \vee \sim t) \\
 t \rightarrow (q \wedge r) \\
 \sim s \\
 \hline
 q \wedge r
 \end{array}$$

CAPÍTULO II.

CONJUNTOS

2.1 TEORÍA DE CONJUNTOS.

La teoría de conjuntos es conocida como la rama de las matemáticas que estudia los conjuntos. Cuyo estudio formal en un inicio fue presentado por el matemático alemán George Cantor en el Siglo XIX. Por otro lado, dicha teoría es un instrumento adecuado para el desarrollo de la capacidad de análisis del individuo; ya que facilita la visualización de las interrelaciones que puedan existir entre todas las partes componentes de un problema, así como de cada parte con el todo.

La teoría de conjuntos es una rama de la lógica matemática, que se encarga del estudio de las propiedades y relaciones entre los conjuntos.

En adelante, se introducirá ciertos aspectos fundamentales de la teoría de conjuntos, que servirán de base para definir la mayoría de los conceptos utilizados: conjunto, subconjunto, entre otros, la notación de los mismos, así como también algunas operaciones con conjuntos.

2.1.1 DEFINICIONES Y NOTACIONES.

En el lenguaje cotidiano la palabra conjunto es considerada en diferentes situaciones, generalmente para indicar una reunión o colección de diferentes cosas que forman un todo. Desde Cantor (1845-1918) un conjunto es una agrupación, clase, colección de objetos o entes de cualquier índole con o sin relación entre ellos. Los objetos o entes de un conjunto se les conoce como elementos.

Los elementos de un conjunto pueden representarse escribiendo sus elementos entre llaves $\{ \}$ o bien mediante diagramas de Venn, y al conjunto se le suele indicar con una letra mayúscula (A, B, C,...) y la de sus elementos con letra minúscula (a, b, c,...). A continuación representamos gráficamente algunos conjuntos.

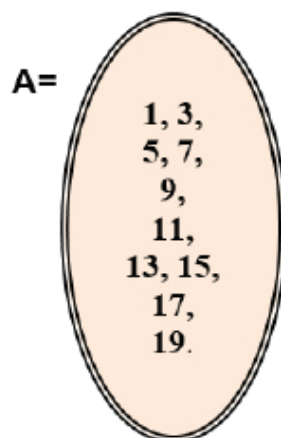
EJEMPLO 1

1.- Representar el conjunto formado por números impares menores que 20.

Solución:

Mediante llaves: $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

Mediante un Diagrama de Venn:



EJEMPLO 2:

1.- Representar el conjunto formado por las vocales.

Solución:

Mediante llaves: $B = \{a, e, i, o, u\}$

Mediante un Diagrama de Venn:



Importante: Para indicar que un objeto es o no un elemento de un conjunto dado, se hace uso de los símbolos: $\in$ (se lee pertenece a) y $\notin$ (se lee no pertenece a). En el caso de los ejemplos anteriores: $a \in A$ pero $b \notin A$.

Generalmente un conjunto puede expresarse de dos maneras:

Por extensión: Es cuando expresamos un conjunto haciendo una enumeración de sus elementos. Estos van separados mediante comas y encerrados entre llaves. Por Ejemplo, $A = \{a, b, c, d, e\}$.

Por comprensión: es cuando expresamos un conjunto señalando una o varias propiedades que caracterizan a sus elementos, de modo que sea posible establecer inequívocamente si cierto elemento pertenece o no a dicho conjunto. En este caso se emplea la notación $A = \{x/x \text{ tiene la propiedad } P\}$ que se lee, A es el conjunto de todos los elementos x tales que x tiene la propiedad P. Por ejemplo, el conjunto A indicado anteriormente por extensión puede escribirse por comprensión de la siguiente manera, $A = \{x/x \text{ es una de las primeras cinco letras del alfabeto}\}$

2.1.2. Clases De Conjuntos

Se conoce como Conjunto Universal o Referencial al conjunto al cual pertenecen todos los elementos de una situación dada o de interés, y se denota con la letra U. Así por ejemplo, en Geometría Plana el conjunto universal es el conjunto de todos los puntos del plano.

Se dice que un Conjunto es Nulo o Vacío cuando no contiene elemento alguno. También podemos decir que carece de elementos. El que suele llamarse conjunto nulo, se denota por el símbolo $\emptyset$ o con las llaves $\{\}$. Un ejemplo de conjunto vacío es el conjunto de los habitantes de Ecuador que tiene más de trescientos años de edad, ya que hasta la fecha no existen registros que demuestren lo contrario.

Se dice que un Conjunto es Finito cuando tiene un número limitado de elementos. Si un conjunto es finito o es numerable, se dice que es contable. Son ejemplos de conjunto finito: el conjunto de estudiantes pertenecientes a la Sección 01 de Estadística, el conjunto de los países de América Central.

Se dice que un Conjunto es Infinito cuando tiene un número ilimitado de elementos. Si un conjunto es finito o es no numerable, se dice que es no contable. Son ejemplos de conjuntos infinito: el conjunto de rectas que pasan por un punto en el plano, el conjunto de los números pares.

2.1.3 OPERACIONES CON CONJUNTOS.

Las operaciones con conjuntos son formas específicas de combinar conjuntos dados para obtener nuevos conjuntos. Constituyen un sistema lógico de construcción de nuevos conjuntos a partir de conjuntos conocidos.

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera:

Llamamos Unión de A y B, escrito $A \cup B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a alguno de los dos conjuntos (sin repetir ninguno). Así, $A \cup B$, se lee A unión B.

EJEMPLO 3

Dados los conjuntos: $A = \{1, 0, 5\}$ y $B = \{-2, 4, 5, 7\}$

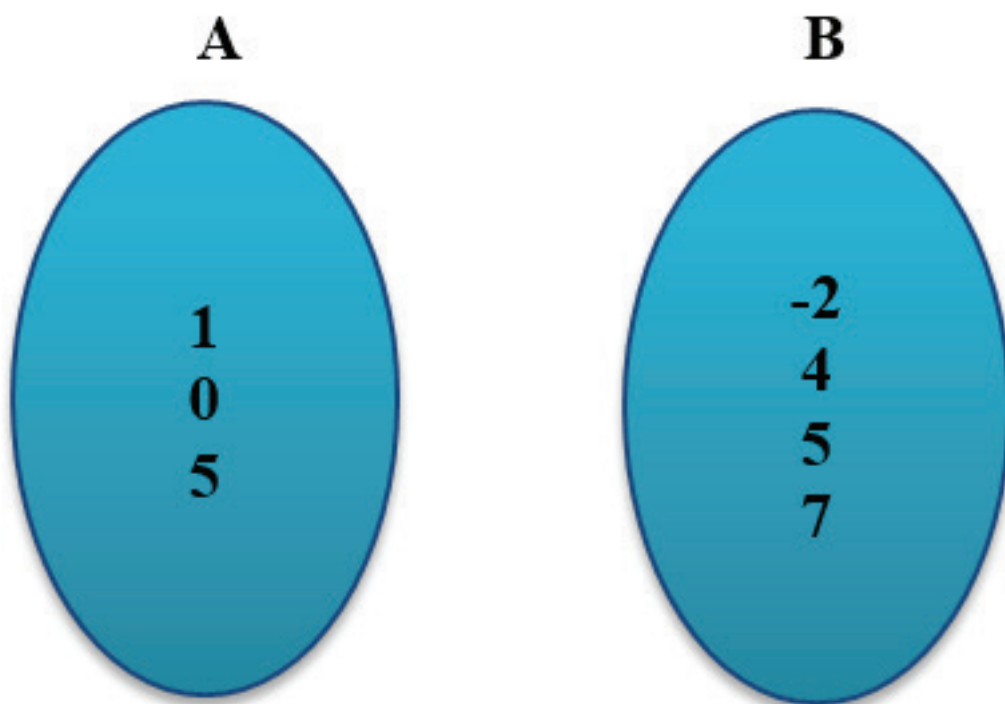
Efectuar y construir el diagrama respectivo:

Solución:

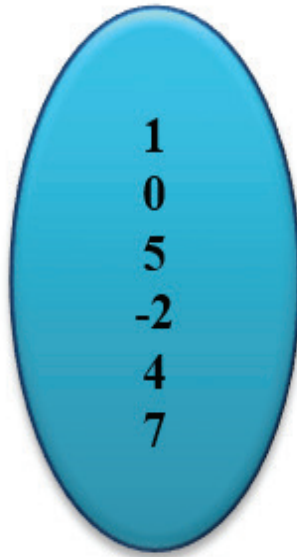
$$A \cup B = \{1, 0, 5\} \cup \{-2, 4, 5, 7\}$$

$$A \cup B = \{1, 0, 5, -2, 4, 7\}$$

Representación gráfica de la unión de conjuntos A y B



$$A \cup B$$



Llamamos **Intersección** de A y B, escrito $A \cap B$, al conjunto compuesto por los elementos comunes en A y B. Así: $S = A \cap B$, que se lee: “S igual a la intersección de A y B”.

EJEMPLO 4

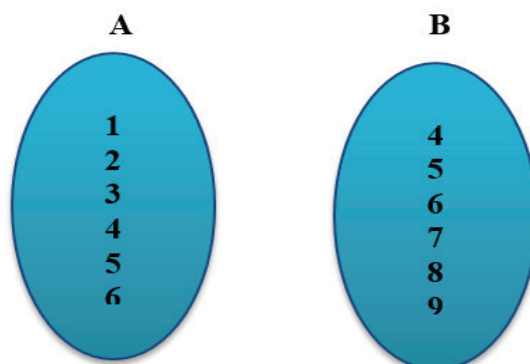
Dados los conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, efectuar y construir el diagrama respectivo.

Solución:

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A \cap B = \{4, 5, 6\}$$

Representación gráfica de la intersección de conjuntos A y B:



$$A \cap B$$



Llamamos Diferencia de A y B, escrito $A-B$, Los elementos de un conjunto A que no se encuentran en otro conjunto B. Así: $A-B$. Que se lee: “A diferencia de B”.

Importante: $A-B \neq B-A$ ($A-B$ no es igual a $B-A$)

Ejemplo 5

Dados los conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

1. Determinar la diferencia de $A-B$.
2. Determinar la diferencia de $B-A$.

Solución

1. Diferencia de $A-B$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A-B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A-B = \{1, 2, 3\}$$

2. Diferencia de $B-A$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}, A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B-A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B-A = \{7, 8, 9\}$$

Con lo anterior, se puede verificar: $A-B \neq B-A$

Así: $\{1, 2, 3\} \neq \{7, 8, 9\}$

Operaciones con Conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera:	
La Unión de A y B se define por la forma:	$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$
La Intersección de A y B se define por la forma:	$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$
La Diferencia de A y B se define por la forma:	$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$
El complemento de A y B se define por la forma:	$C' = \{x/x \in U \wedge x \notin A\}$, siendo U un conjunto universal y A algún subconjunto de él.

2.1.4 EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.-Dados los siguientes conjuntos:

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35\}$$

$$B = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34\}$$

$$C = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,35\}$$

$$D = \{5,10,15,20,25,30,35\}$$

Desarrolle las operaciones:

1. $B - A =$

2. $A - B =$

3. $D - C =$

4. $C - D =$

5. $(B \cap A) \cup (D \cap C) =$

6. $C - D =$

7. $B \cap D =$

8. $(B \cup D) \cap (D \cap A) =$

9. $B \cap \emptyset =$

10. $B \cap C =$

11. $\emptyset - D =$

12. $\emptyset \cap A =$

CAPÍTULO III.

NÚMEROS REALES

3.1 DEFINICIÓN DE NÚMERO REAL.

Teniendo en cuenta que un número representa la expresión de una cantidad con relación a su unidad; y que su término proviene del latín numerus, el cual hace referencia a un signo o a un conjunto de signos. Los números reales (R) constituyen el conjunto formado por la unión de los denominados números racionales (Q) y los números irracionales (I), lo que significa, que cualquier número real debe ser un número racional o irracional. En otras palabras, un número que puede ser representado a través de las denominadas expresiones decimales periódicas y no periódicas.

Se denomina conjunto de los números reales, denotado por (R), al conjunto resultante de la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales.
 $R=Q \cup I$

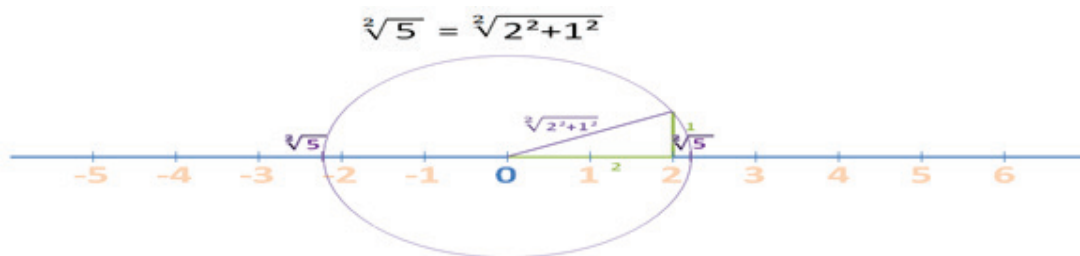
Un número real es cualquier número que se puede escribir mediante una expresión decimal periódica y no periódica.

3.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS REALES.

El conjunto de los números reales es posible representarlos gráficamente asociándolos a los puntos de una recta denominada recta numérica. En esta un número elegido arbitrariamente será el cero, al que se le llamará origen. A la derecha del origen se define el semieje positivo y a la izquierda el semieje negativo. Eligiendo una escala apropiada, y en base a ella, se fijan ciertos puntos que ordenadamente se corresponderán con los elementos del conjunto (R). Al no quedar puntos vacíos, se evidencia que los números reales llenan totalmente la recta numérica, quedando así definida la recta real. O 1

Representar en la recta real al número: $\sqrt{2^2+1^2}$

Solución



3.3 APROXIMACIONES POR DEFECTO Y POR EXCESO DE NÚMEROS REALES.

Estamos conscientes de la existencia de números reales con infinitas cifras decimales. Así que cuando se dice $\sqrt{2}=1,4142$ o que $e=2,71828$, se está haciendo uso de aproximaciones decimales de tales números.

EJEMPLO 2

Al hacer la representación aproximada del número $\sqrt{2}$, consideremos segmentos cada vez más pequeños que contienen este número. Los extremos de estos segmentos corresponden a números decimales que se va acercando al valor exacto de la raíz; de esta forma, son aproximaciones de $\sqrt{2}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & < & \sqrt{2} & < & 2 \\ 1,4 & < & \sqrt{2} & < & 1,5 \\ 1,41 & < & \sqrt{2} & < & 1,42 \\ 1,414 & < & \sqrt{2} & < & 1,415 \end{array}$$

De la disposición de los números se puede observar que los extremos de la izquierda (1; 1,4; 1,41; 1,414;...) son valores menores que $\sqrt{2}$, mientras que los de la derecha (2; 1,5; 1,42; 1,415;...) son mayores.

Las aproximaciones que son menores que el valor exacto se denominan aproximaciones por defecto y las que son mayores, aproximaciones por exceso.

El número de cifras decimales de la aproximación elegida determina su orden de aproximación.

Así, si se toma 1,4 como aproximación de $\sqrt{2}$, se dice que el orden de aproximación es el de las décimas, o que se ha aproximado $\sqrt{2}$ hasta las décimas.

Se dice que un número “a” es una APROXIMACIÓN POR DEFECTO de un número real “x” si “a” es menor que “x”.

Se dice que un número “a” es una APROXIMACIÓN POR EXCESO de un número real “x” si “a” es mayor que “x”.

Regla práctica para aproximar un número por redondeo:

- **Observar la cifra a redondear.**
- **Si la cifra es menor que 5, se realiza la aproximación por defecto, se conserva la última cifra.**
- **Si la cifra es mayor o igual a 5, se realiza la aproximación por exceso, aumentando en una unidad la última cifra que se conserva.**

EJEMPLO 3

CIFRA	APROX. DÉCIMAS	APROX. CENTÉSIMAS	APROX. MILÉSIMAS
4,735286	4.7	4.74	4.735
1,318942	1,3	1,32	1,319

3.3.1 EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Representar en la recta real los siguientes números reales:

- a) $29/12$
- b) $-3/5$
- c) $-5,63$
- d) $-\sqrt{5}$
- e) e
- f) $0,666$
- g) $\sqrt[3]{-85}$

2.- Determinar $\sqrt{8}$, y escribir las mejores aproximaciones por defecto y por exceso en el orden siguiente:

Aproximaciones por Defecto		Aproximaciones por Exceso	
Décimas		Décimas	
Centésimas		Centésimas	
Milésimas		Milésimas	

3.- Tomando como referencia el cuadro anterior, escribir la mejor aproximación por exceso y por defecto de las siguientes cantidades:

4,75489	6,56598	0,54895	1,69456
5,424851	9,31759	3,13474	7,469592

4.- Calcular dos aproximaciones en el orden d las centésimas a los números:

- a) 22,222 b) $29/12$ c) $3/17$ d) 2,151. ¿Cuáles representan aproximaciones por exceso y cuales por defecto?

3.4 OPERACIONES CON NÚMEROS REALES.

En el conjunto de los números reales se pueden distinguir dos operaciones básicas, denominadas adición y multiplicación; las cuales poseen propiedades análogas a las de la adición y multiplicación con números racionales, reflejadas en los siguientes cuadros:

ADICIÓN

Si $x + y \in \mathbb{R}$

Conmutatividad

$$x+y = y+x$$

Asociatividad

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

Elemento Neutro

El número real 0 verifica: $x+0=0+x=x$

Elemento Opuesto

Dado x , existe un número real $-x$ tal que: $x+(-x)=(-x)+x=0$

MULTIPLICACIÓN

Si $x \cdot y \in \mathbb{R}$

Conmutatividad

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Asociatividad

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Elemento Neutro

El número real 1 verifica: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

Elemento Inverso

Dado $x \neq 0$, existe un número real $1/x$ tal que: $x \cdot (1/x) = (1/x) \cdot x = 1$

Distributividad de la multiplicación con respecto a la adición:

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Dada las propiedades anteriores, se pueden deducir otras operaciones y fórmulas que son consecuencia de las mismas como el caso de los productos notables. Así también a partir de la adición y la multiplicación, pueden definirse las operaciones de sustracción $(x-y)$ y de división x/y para todo $(y \neq 0)$ de dos números reales x, y .

Las operaciones con números reales utilizando símbolos de agrupación como: (), [] y { }; permiten determinar soluciones, teniendo en cuenta un orden para desarrollar dichas operaciones. En este sentido, se inicia resolviendo la o las operaciones encerradas en el paréntesis, seguidamente las dispuestas en los corchetes, y por último las que se encuentran entre llaves. Ello no es más que la simplificación de símbolos de agrupación.

En los siguientes ejemplos se ilustrarán operaciones con números reales, simplificando símbolos de agrupación:

EJEMPLO 4

1.- Obtenga el valor de:

a) $7 - 10 (3 + 5 - 8) - [3 - 2 (2 - 3)] - [6 - 3 (4 + 1)]$

Solución:

Observe con atención: $7 - 10 (0) - [3 - 2 (- 1)] - [6 - 3 (5)]$

$$7 - 0 - [3 + 2] - [6 - 15]$$

$$7 - 0 - [5] - [- 9]$$

$$7 - 0 - 5 + 9$$

$$16 - 5$$

$$11$$

b)

$$- 3 + \left\{ - \frac{3}{4} - \left[- 2 + \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{8} - \frac{8}{4} \right) \right] - \frac{1}{6} \right\} =$$

$$- 3 + \left\{ - \frac{3}{4} - \left[- 2 + \frac{5}{2} - \left(\frac{3 - 16}{8} \right) \right] - \frac{1}{6} \right\} = \quad \text{m.c.m} = 8 \text{ en el paréntesis}$$

$$- 3 + \left\{ - \frac{3}{4} - \left[- 2 + \frac{5}{2} - \left(\frac{- 13}{8} \right) \right] - \frac{1}{6} \right\} =$$

$$- 3 + \left\{ - \frac{3}{4} - \left[- 2 + \frac{5}{2} + \frac{13}{8} \right] - \frac{1}{6} \right\} = \quad \text{m.c.m} = 8 \text{ en el corchete}$$

$$- 3 + \left\{ - \frac{3}{4} - \left[\frac{- 16 + 20 + 13}{8} \right] - \frac{1}{6} \right\} =$$

$$- 3 + \left\{ - \frac{3}{4} - \left[\frac{- 16 + 20 + 13}{8} \right] - \frac{1}{6} \right\} =$$

$$-3 + \left\{ -\frac{3}{4} - \left[\frac{-16+33}{8} \right] - \frac{1}{6} \right\} =$$

$$-3 + \left\{ -\frac{3}{4} - \left[\frac{17}{8} \right] - \frac{1}{6} \right\} =$$

$$-3 + \left\{ -\frac{3}{4} - \frac{17}{8} - \frac{1}{6} \right\} =$$

m.c.m = 8 en el corchete

$$-3 + \left\{ -\frac{18-51-4}{24} \right\} =$$

$$-3 + \left\{ \frac{-73}{24} \right\} =$$

$$-3 - \frac{73}{24} =$$

$$\frac{-72-73}{24}$$

$$\frac{-145}{24}$$

c)

$$\frac{0,5 \times 2 + 0.6 \div 0.03 + 0.4}{0.008 \div 8}$$

Solución:

$$(1 + 20 + 0.4) / 0.01$$

$$(1 + 20 + 0.4) / 0.01$$

$$21.4 / 0.01$$

$$2.140$$

3.4.1 EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Obtenga el valor de:

a) $5 - 4(2 + 6 - 10) - [7 - 3(2 - 3)] - [6 - 5(4 + 2)]$

b) $4 - 6(3 + 5 - 17) - [12 - 9(16 - 5)] - [7 - 4(7 + 1)]$

c) $9 - 7(2 + 8 - 18) - [1 - 2(5 - 3)] - [6 - 3(4 + 1)]$

d) $7 - 8(3 - 5 - 8) - [3 + 2(6 - 3)] - [7 - 3(4 - 1)]$

$$\text{e)} -5 + \left\{ -\frac{3}{5} - \left[-7 + \frac{2}{5} - \left(\frac{6}{4} - \frac{8}{2} \right) \right] - \frac{13}{6} \right\} =$$

$$\text{f)} -\frac{3}{4} + \left\{ -\frac{12}{5} - \left[-3 + \frac{6}{5} - \left(\frac{5}{2} - \frac{8}{4} \right) \right] - \frac{1}{5} \right\} =$$

$$\text{g)} -\frac{1}{4} + \left\{ -\frac{3}{2} - \left[-2 + \frac{5}{7} - \left(\frac{3}{2} - 1 - \frac{3}{8} \right) \right] - \frac{3}{4} \right\} =$$

$$\text{h)} -3 - \frac{35}{9} + \left\{ -\frac{3+2}{4} - \left[-1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{6} \right) \right] - \frac{2}{6} \right\} =$$

$$\text{i)} \frac{0.005 \times 20 + 0.61 \div 0.03 + 0.43}{0.06 \div 6}$$

$$\text{j)} \frac{0.569 \times 3 + 4.25 \div 0.5 + 7.04}{0.008 \div 8 + 0.1 \div 0.1 - 0.001}$$

$$\text{k)} \frac{4 + \sqrt{5} + 0.06 \div 3.6383}{4 \times 0.01 + 3 \times 0.001}$$

$$\text{l)} \frac{2\pi \times 2 + 0.6 \div 0.06 + 8.236}{\in}$$

CAPÍTULO IV.

NÚMEROS COMPLEJOS

4.1 INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El estudio de los conjuntos numéricos nos ha llevado a la necesidad de ir ampliando sucesivamente los mismos, debido fundamentalmente al hecho de interés práctico de poder definir algunas operaciones en el conjunto ampliado que no eran posibles definir en el anterior.

Por ejemplo el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$), surge de la necesidad de poder efectuar en todos los casos la sustracción, ya que en el conjunto de números naturales ($\mathbb{N}$), solo es posible realizarla cuando el minuendo es mayor o igual que el minuendo (si consideramos al cero como un número natural).

De la misma forma los números fraccionarios permiten efectuar la división en todos los casos (excepto cuando el divisor es cero), y los números reales se completan para poder medir cantidades no racionales como la diagonal del cuadrado de lado uno; esto último es equivalente a la solución de las ecuaciones $x^2 = a$, donde a no es un cuadrado perfecto. El problema se resuelve añadiendo, un nuevo conjunto numérico el de los números irracionales.

EJEMPLO 1

1.-Determine el dominio numérico más reducido al que pertenecen los números siguientes:

a) $5/6$	$\in$ al conjunto de números racionales ($\mathbb{Q}$), ya que puede expresarse como el cociente entre dos enteros.
b) -6	$\in$ al conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$), pues es el opuesto de un número natural
c) 1.5	$\in$ al conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), pues se expresa como una expresión decimal finita.
d) 1.354678	$\in$ al conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), pues se expresa como una expresión decimal finita.

Todos los números anteriores pertenecen también, como conjunto más amplio al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

Podemos hacer entonces los siguientes cuestionamientos:

¿Existen problemas de sentido práctico que conduzcan a la necesidad de crear nuevos números?

¿Existe alguna operación que no ha podido ser resuelta en el dominio de los números reales?

Sobre este último aspecto, sabemos que un problema no soluble en el conjunto de los números reales, lo constituye la extracción de la raíz cuadrada de números negativos, y en general la extracción de la raíz par de un número negativo.

También recordarás que al estudiar las ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde la expresión $D = b^2 - 4ac$, se llama Discriminante, que si $D < 0$, no existen soluciones reales, pues la raíz cuadrada de un número negativo no tiene sentido en el cálculo, hasta estos momentos.

Entonces, la introducción de nuevos números, llamados **NÚMEROS COMPLEJOS**, (**C**) está plenamente justificada para poder dar significación, en general, a la raíz par de un número negativo, quiere decir para resolver un problema de orden práctico que no puede ser resuelto en el Conjunto de Números Reales.

Comencemos definiendo un elemento que denotaremos por i y que satisface:

$$i^2 = -1$$

A este elemento le llamaremos unidad imaginaria, y admitiremos que con él se puede operar siguiendo las reglas de los números reales, teniendo en cuenta la condición enunciada.

Una vez definida la unidad imaginaria, enunciaremos la definición de números complejos.

Un número complejo es un número de la forma $a + bi$, donde:

a y b : números reales ,

i : unidad imaginaria.

A esta expresión $a + bi$, se llama número complejo, expresado en forma binómica, donde **a** se llama parte real y **b** se llama parte imaginaria. El conjunto de Números complejos es denotado por **C**.

Por un número complejo, entendemos cualquier elemento del conjunto
 $C = \{ Z: Z = a + bi, \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } i^2 = -1 \}$

EJEMPLO 2

Calcular:

a) $\sqrt{-16}$

Solución: $\sqrt{-16} = \sqrt{16} i^2 = \pm 4i$, puesto que $i^2 = -1$

b) $2 + 6i$, es un número complejo dado en forma binómica, donde 2 es la parte real y 6 la parte imaginaria.

c) Un número complejo $a + bi$, donde $b = 0$, es un número real. De ahí que los números reales constituyen un subconjunto de los números complejos, cuando la parte imaginaria es igual a cero.

d) Los números complejos $a + bi$, con $b \neq 0$, reciben el nombre de números imaginarios. $7 + 4i$ es un número imaginario.

e) Los números complejos $a + bi$ con $a = 0$, reciben el nombre de números imaginarios puros. Así $0 + 3i = 3i$, es un número imaginario puro.

4.2 IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS

Es importante definir la igualdad entre dos números complejos:

Sean los números complejos, $a+bi$, $c + di$. Se dice que: $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$

EJEMPLO 3

1.-Determine x, y , si $(x+2) + 3i = -1 + (y^2 + 2y) i$

Solución: Por la definición de igualdad de números complejos, debe cumplirse que:

$$\begin{aligned} x + 2 &= -1 & y & & 3 &= y^2 + 2y \\ x &= -3 & y & & y^2 + 2y - 3 &= 0 \\ & & & & (y + 3)(y - 1) &= 0 \\ & & & & y = -3 & \text{ o } & y = 1 \end{aligned}$$

Así, $x = 3$, mientras que $y = -3$ o $y = 1$.

4.3 OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Definiremos ahora las principales operaciones con números complejos:

Si $a + bi, c + di$ son dos números complejos, entonces las siguientes operaciones están definidas:

a) Adición	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) i$
b) Sustracción	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) - (b - d) i$
c) Producto	$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bd i^2$ $= (ac - bd) + (ad + bc) i$

d) Cociente	$\frac{(a+bi)}{(c+di)}$ $c \neq 0$, $d \neq 0$ Para llegar a la expresión del cociente, multipliquemos numerador y denominador por: $\frac{(c-di)}{(c-di)}$ de forma tal que obtengamos un número real en el denominador: Así $\frac{(a+bi)}{(c+di)}$ $\frac{(c-di)}{(c-di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - cdi + cdi - d^2 i^2}$ $= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$ $= \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} i$
---------------------------	---

EJEMPLO 4

1.-Efectuar las siguientes operaciones con números complejos:

a) $(2 + 3i) + (3 - 2i)$

Solución: $(2 + 3i) + (3 - 2i) = (3+2) + (3-2) i = 5 - i$

b) $(2 + 3i) (3 + 4i)$

Solución:

$$\begin{aligned}
 (2 + 3i) (3 + 4i) &= 6 + 8i + 9i + 12 i^2 \\
 &= 6 + 17 i + 12 (-1) \\
 &= 6 + 17 i - 12 \\
 &= -6 + 17 i
 \end{aligned}$$

$$c) \frac{(2+3i)}{(3+4i)}$$

Solución: Aplicando la definición de división de números complejos, tenemos:

$$\frac{(2+3i)}{(3+4i)} = \frac{2(3)+3(4)}{3^2+4^2} + \frac{3(3)-2(4)}{3^2+4^2}i$$

$$= \frac{18}{25} + \frac{9-8}{25}i$$

$$= \frac{18}{25} + \frac{1}{25}i$$

4.3.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Determine la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:

a) $6 + 2i$

b) $12i - 8$

c) i

d) $\frac{2+5i}{2}$

2.- Calcular la suma de los siguientes números complejos:

a) $(3 + 6i) + (5 + 3i)$

b) $(7 + 7i) + (-6 + 2i)$

c) $(1 + 5i) + (5 + 4i)$

d) $(8 + 16i) + (-9 - 9i)$

e) $(-6 + 5i) + (16 - 12i)$

f) $(-2 - i) + (-1 - i)$

g) $(-9 - \frac{3}{8}i) + (5 + \frac{2}{3}i)$

h) $(4 + 2i) + (0 + 3i) + (6 + 2i)$

i) $(-5 + 3i) + (3 + 4i) + 8i$

j) $(\frac{1}{3} - \frac{4}{5}i) + (12 + i) + (\frac{7}{3} - \frac{2}{5}i)$

$$k) (z + x^2 i) + (i/y^2) + x/y$$

$$l) (1/2 - 0,5i) + (1,5 + \frac{5}{2}i)$$

$$m) (2p - 3qi) + (-m/2 i + n)$$

3.- Calcular las diferencias siguientes de números complejos:

$$a) (4 + 2i) - (2 - 4i)$$

$$b) (2 + 0i) - (3 + 0i)$$

$$c) (10 + 3i) - (-5 - 2i)$$

$$d) (-8 + 2i) - (3 + 6i)$$

$$e) (-6 - 2i) - (-4 - 3i)$$

4.- Calcular los siguientes productos de números complejos:

$$a) (6 + 3i)(5 + i)$$

$$b) 4(5 - 2i)$$

$$c) -5(4 + 3i)$$

$$d) (1 + 2i)(6 - 7i)$$

$$e) (2 + 3i)(3 + 15i)$$

$$f) (5 + 0i)(0 + 7i)$$

$$g) i(4 + i)$$

5.- Calcular los siguientes cocientes de números complejos:

$$a) \frac{8+2i}{4-2i}$$

$$b) \frac{4-i}{4+i}$$

$$c) \frac{i}{(3+i)}$$

$$d) \frac{-i}{i}$$

6. - Calcular:

$$a) (2 - i)(3 + i) - (2 + 4i)$$

$$b) (3 + 6i)(4 - 8i) - (3 - i)(1 - 5i)$$

$$c) (1 + i)(1 - i) - 5(2 + 3i)(4 - 5i) - (3 - i)$$

$$d) (2 + 3i)^2$$

$$e) (1 + i)^3 - (1 - i)^3$$

$$f) \frac{(1+3i)(1+i)}{(4-i)+(4+i)} + (6-6i)$$

7.- Determine x, y si (x,y, números reales)

$$a) x^2 - 3x + (y - 4)i = -2 + 3i$$

$$b) x + y - i(2x - y) = 4 - 4i$$

$$c) x + y + (xy)i = 4$$

$$d) x - iy = 4$$

$$e) (3x - i) + (y - x - 5) = 8 - iy$$

$$f) (4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$$

8.- Calcular los valores de x, y que satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$a) (x + iy)(1 - 5i) = 2 + 5i$$

$$b) (x + iy)(-1 + 4i) = -9 + 5i$$

$$c) (x + iy)(2 + i) = 1 + 3i$$

4.4 NÚMEROS COMPLEJOS CONJUGADOS

Hemos estudiado que un número complejo puede ser representado en forma binómica por una expresión que es: $a + bi$, donde a es la parte real y b la parte imaginaria.

En otras palabras un número complejo es la suma de un número real por el producto de un número real por la parte imaginaria.

**Ahora, dos números complejos se llaman conjugados si difieren solo en el signo de la parte imaginaria.
Así: si $z = a + bi$, su conjugado que se denota como $\bar{z} = a - bi$**

EJEMPLO 5

a) El conjugado de $z = 2 + \pi i$

Solución: es $z = 2 - \pi i$

b) El conjugado de $z = 3i$ es $z = -3i$

Solución:

Podemos señalar que:

Si $z = a + bi$ entonces se cumple que:

a) $z - z = a^2 + b^2$

En efecto:

$$z \pi = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

Puedes comprobar que también se cumple:

b) $z + z = 2a$

c) $z - z = 2bi$

4.5 MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Al igual que cuando estudiamos los números reales, definimos el módulo de un número real, como un número no negativo que cumplía las siguientes condiciones:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 6

1.-Los módulos o valores absolutos de los siguientes números reales son:

a) $|3| = 3$

b) $|-2| = -(-2) = 2$

c) $|1/3| = 1/3$

d) $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$

Podemos definir también el módulo de un número complejo de la siguiente forma:

Se llama módulo de un número complejo $z \in \mathbb{C}$, y se denota por $|z|$ al número real:

$$\sqrt{Z * \bar{Z}}$$

Quiere decir que el módulo de un número complejo se obtiene hallando la raíz cuadrada del producto del número por su conjugado.

Pero por el ejemplo 22 literal a) sabemos que:

$$z - z = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

Luego, en general se cumple que si $z = a + bi$, entonces:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

EJEMPLO 7

a) Calcular el módulo de: $z = 2 + 3i$ **Solución:**

$$|z| = \sqrt{Z * \bar{Z}} = \sqrt{(2+3i)(2-3i)} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3.61$$

b) Los conceptos estudiados pueden ser utilizados para facilitar la división de números complejos:

Expresar en forma binómica:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + i}$$

Solución: Para expresar el número complejo dado, en forma binómica se multiplica y divide la fracción por el conjugado del denominador. Así:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + i} = \frac{1}{\sqrt{2} + i} * \frac{(\sqrt{2} - i)}{(\sqrt{2} - i)} = \frac{\sqrt{2} - i}{2 + 1} = \frac{\sqrt{2} - i}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}i$$

4.5.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Determinar la parte real e imaginaria de los números complejos siguientes:

a) $\frac{8+16i}{2}$

b) $12 - (i + 4)$

c) $\frac{1}{i}$

d) $\frac{2 + 3i}{1 - i}$

2.- Determinar los conjugados de los números complejos siguientes:

a) $\frac{3}{4} - i$

b) $(2 - i) + (2 + i)$

c) $\cos \Pi/4 + i \sin \Pi/4$

d) $(6 + 7i)(\sqrt{5} - 2i)$

e) $(4 - 3i)^2 + (2 + 6i)(i - 4i)$

f) $\frac{3,5 - 5i}{2 + \sqrt{3}i}$

3.- ¿Para cuales valores de x e y (x, y ∈ R) los números complejos:

$z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$ $z^2 = 8y_2 + 20i^7$, son conjugados?

4.- Calcular el módulo de los números complejos siguientes:

a) $z = 3 + 4i$

b) $z = \sqrt{3} + i$

c) $z = \tan 45^\circ + i$

d) $z = 7i$

e) $z = 2 \cos x + 2i \sin x$

f) $x^2 + y^2 + 2xyi$

5.- Calcular el módulo del número complejo w con la condición indicada:

$W = z^2 + z - 1$, $z = \sqrt{2} - i$

6.- Representar en forma binómica:

a) $\frac{4 + 2i}{2 + i}$

b) $(2 - i) \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i \right)$

7.- Resolver:

a) $z^2 + 9 = 0$

b) $z^2 - 3z = 0$

c) $z^2 + 15 = 0$

d) $z^2 + z + 1 = 0$

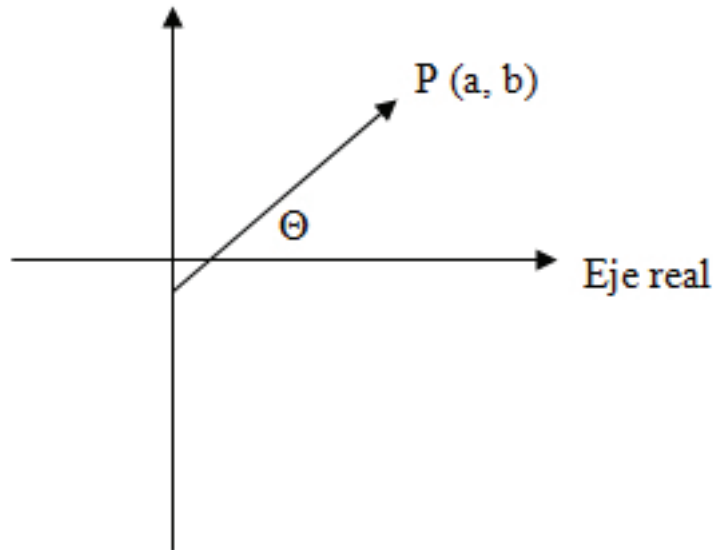
e) $z^2 - z + 5 = 0$

4.6 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Como los números reales se representan sobre una recta numérica, de modo que a cada número real corresponde un punto de la recta y recíprocamente. El módulo de un número real x , $|x|$ representa la distancia entre el punto que representa a ese número real x , y el origen o punto $x = 0$.

Como los números reales “llenan” completamente la recta, no hay lugar para los números complejos. Podemos notar que cada número complejo $z = a+bi$ está determinado por un par de números reales (a,b) , de ahí surge la idea de representar los números complejos utilizando el plano cartesiano, como se indica a continuación:

Eje imaginario



Como se observa en la figura, sobre el eje horizontal se representa la parte real de los números complejos y por esa razón su nombre es eje real. Sobre el eje vertical se representa la parte imaginaria y recibe el nombre de eje imaginario.

Hay dos representaciones geométricas del número complejo $z = a + bi$

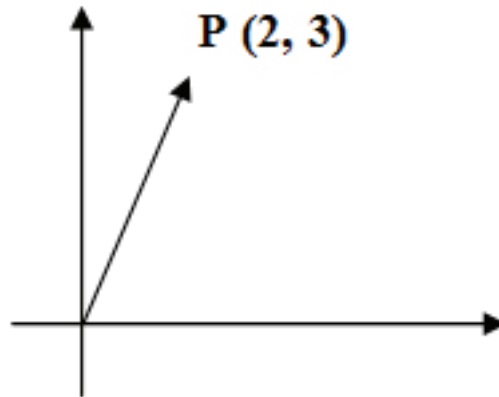
a) Como el punto $P(a,b)$ del plano.

b) Como segmento dirigido OP que va del origen a P , que tiene longitud igual a r y forma el ángulo θ con el eje x .

EJEMPLO8

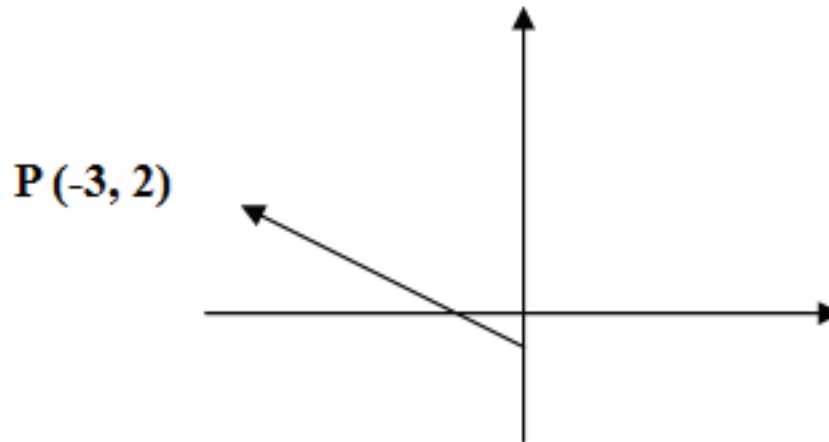
a) Representar gráficamente el número complejo $z = 2 + 3i$

Solución:



b) Identificar el número complejo que aparece representado en la figura.

Solución:



Puede comprobarse fácilmente que la longitud del vector que representa al número complejo $z = a + bi$, es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ por lo que podemos enunciar que:

El módulo de un número complejo es igual a la longitud del vector que lo representa.

4.6.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Representar gráficamente los siguientes números complejos y calcula la longitud del vector que lo representa:

a) $3 + 5i$

b) $4 - i$

c) $-2 - 2i$

d) $-4i$

e) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$

f) $-0,2 + 0,5i$

g) -4

CAPÍTULO V.

ECUACIONES E INECUACIONES

5.1 CONCEPTOS BÁSICOS.

Para introducir el concepto de ecuación, se hará referencia a dos conceptos básicos importantes, como lo son: igualdad e identidad.

5.1.1 IGUALDAD.

Una igualdad es una expresión que se obtiene al igualar dos cantidades que tienen el mismo valor, haciendo uso del signo ($=$), que se lee, igual.

Igualdad: expresión que se obtiene al igualar dos cantidades a través del signo ($=$)

EJEMPLO 1

Sean las expresiones:

- a) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- b) $3x+2 = x + 5$

Ambas son igualdades. Al observar cada una de las igualdades se define, que lo que está a la izquierda del signo igual, se llama primer miembro, y todo que esté a la derecha, segundo miembro.

La igualdad **a)** se dice cierta para cualesquiera valores de x y y , pero la igualdad **b)** no se satisface para todo valor de x . Con este hecho, se logra clasificar las igualdades en identidades y ecuaciones.

5.1.2. IDENTIDAD

Una Identidad es una igualdad en la que ambos miembros son iguales para todos los valores de las variables para los cuales están definidos los miembros. Obsérvese la expresión **a)** en el ejemplo 1.

Identidad: es una igualdad en la que ambos miembros son iguales para todos los valores de las variables para los cuales están definidos los miembros.

Una ecuación es una igualdad en la cual ambos miembros son iguales sólo para valores particulares de las variables. Obsérvese la expresión **b)** en el ejemplo 1.

5.2 DEFINICIÓN DE ECUACIÓN

¿Qué es una ecuación?

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas en la cual ambos miembros son iguales sólo para valores particulares de las variables.

Notación: $ax + b = 0$, donde a y b son diferentes de cero.

5.2.1 ELEMENTOS DE UNA ECUACIÓN.

MIEMBROS: Son las expresiones que aparecen a cada lado del signo ($=$). En otras palabras, son las expresiones algebraicas que presentan los datos (valores conocidos) y las incógnitas (valores desconocidos), relacionados a través de operaciones matemáticas.

TÉRMINOS: Son los monomios de cada miembro, separados por los signos de suma y/o resta. Los datos presentados en una ecuación pueden ser números, constates, coeficientes o variables.

INCÓGNITAS: Son las letras que aparecen en la ecuación.

Las incógnitas son las variables cuyos valores son desconocidos en una ecuación, y suelen identificarse con las últimas letras del alfabeto, que reemplazan al valor que se intenta hallar.

GRADO DE LA ECUACIÓN: Es el mayor exponente con que figura la incógnita (una vez realizadas todas las operaciones).

SOLUCIONES: Son los valores que deben tener las incógnitas para que la igualdad entre los miembros sea cierta.

EJEMPLO 2

1.- En la expresión dada, distinguir los elementos de la ecuación:

$$4x - 3 = 2x + 1$$

Solución:

Miembros: $4x - 3$, $2x + 1$

Términos: $4x$, 3 , $2x$, 1

Incógnita: x

Grado de la ecuación: 1

Solución: $x = 2$

5.2.2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

¿Cómo se resuelve una ecuación?

Resolver una ecuación significa determinar el o los valores de las incógnitas que las satisfacen. De allí, que se puede decir, que las soluciones o raíces de una ecuación son los valores de las incógnitas que la verifican.

Para resolver una ecuación, la generalidad de las veces, se usa la llamada Transposición de términos, que consiste en:

Sean a, b, c número reales con $a \neq 0$, y la ecuación:

$$ax + b = c$$

Si restamos b a ambos miembros se tiene:

$$ax + b - b = c - b$$

$$ax = c - b$$

Si se dividen ambos miembros por a , se obtiene:

$$ax/a = (c-b) / a.$$

$$x = (c-b) / a$$

Según lo anterior, comparando $(ax + b = c)$ con $(ax = c - b)$, se observa que el término b ha sido transpuesto del primero al segundo miembro cambiando su signo. Se puede decir, como norma general, que para pasar un término de una ecuación de un miembro a otro basta con cambiar su signo. Esta operación se conoce como transposición de términos.

Ahora comparemos $(ax = c - b)$ con $(x = (c - b) / a)$. El factor a que está multiplicando el primer miembro en la segunda expresión, pasa a dividir el segundo miembro de la tercera. Así pues, todo factor que multiplica a un miembro de una ecuación, pasa dividiendo al otro miembro de dicha ecuación, y viceversa, todo factor que divide a un miembro, pasa al otro, multiplicando. Esto es muy importante, pues permite la posibilidad de simplificar una ecuación, siempre que todos los términos se puedan dividir por un mismo factor.

EJEMPLO 3

1.- Determine la solución de las siguientes ecuaciones:

a. $3x - 1 = 7$

Solución:

Se suma 1 a ambos miembros: $3x - 1 + 1 = 7 + 1$

$$3x = 8$$

Se divide ambos miembros por 3: $3x/3 = 8/3$

Se obtiene: $x = 8/3$

b. $2x + 4 = 8x - 5$

Solución:

Se agrupan términos semejantes, restando $8x$ al primer miembro y restando 4 al segundo miembro:

$$2x - 8x = -5$$

$$-4 - 6x = -9$$

Se divide ambos miembros por -6 : $-6x / -6 = -9 / -6$

Se obtiene: $x = 9/6$

Al simplificar,

$$x = 3/2$$

c. $6x + 1/2 = 1/4$

Solución:

Se resta $1/2$ a ambos miembros: $6x + 1/2 - 1/2 = 1/4 - 1/2$

$$6x = -2/8$$

Simplificamos,

$$6x = -1/4$$

Se multiplica ambos miembros por $1/6$: $6x \cdot 1/6 = -1/4 \cdot 1/6$

Se obtiene: $x = -1/24$

5.3. ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS.

Para poder darle cualidad a una ecuación de lineal y cuadrática, se debe clarificar el grado de una ecuación, a través de la siguiente definición:

El grado de una ecuación con una sola incógnita, es el mayor exponente al que está elevada la incógnita en esa ecuación.

EJEMPLO 4

Así,

$x + 2 = 3$ es una ecuación de primer grado.

$x^2 + 3x - 10 = 0$ es una ecuación de segundo grado.

$x^3 + 5x^2 - 6x = 2$ es una ecuación de tercer grado.

5.3.1. ECUACIÓN LINEAL.

Como ya es sabido, las ecuaciones son clasificadas atendiendo al número de incógnitas y al grado de éstas.

5.3.1.1 DEFINICIÓN:

Las ecuaciones lineales o de primer grado con una incógnita se denominan así porque:

- Tienen una única incógnita.
- El grado de la incógnita es 1.

Una ecuación de primer grado se puede expresar de la forma $ax = b$, con a y b números reales y a distinto de cero.

La solución general es de la forma: $x = b$ con $a \neq 0$.

Una ecuación de primer grado o lineal con una incógnita, viene dada por la expresión: $ax+b=0$, con $a \neq 0$ en donde a y b son números reales. Con x elevada a la potencia 1 (x^1).

5.3.1.2 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES.

¿Cómo se resuelve una ecuación lineal?

Se resuelven usando los pasos siguientes, los cuales corresponden a una transposición de términos.

Sea la ecuación: $ax + b = 0$

Pasos

1. Transponer b , al segundo miembro. Así se obtiene la ecuación equivalente: $ax = -b$.

2. Se divide ambos miembros de la ecuación entre a , de la cual se obtiene otra ecuación equivalente, que no es más, que la solución de la ecuación dada. Esta es: $x = -b/a$

Obsérvese, que si este valor de x se sustituye en: $ax+b=0$, se obtiene una identidad, ya que:

$$a(-b/a) + b = 0$$

$$-b + b = 0$$

$$0 = 0$$

De lo que se puede concluir: Toda función lineal de la forma; $ax + b = 0$, con $a \neq 0$. Tiene una única solución o raíz, en este caso es, $x = -b / a$

EJEMPLO 5

1.- Determinar el valor de x en la ecuación: $7x - 4 = 0$

Solución:

Transponemos 4 al segundo miembro: Lo que significa que si 4 está restando en el primer miembro, pasa al segundo miembro sumando:

$$7x = 4$$

Transponemos 7 al segundo miembro: Lo que significa que si 7 está multiplicando a la variable en el primer miembro, pasa al segundo miembro dividiendo:

$$x = 4 / 7$$

EJEMPLO 6

1.- Determinar el valor de x en la ecuación:

$$3 - \frac{2x - 6}{3} + \frac{3x}{5} = 10 - x$$

Solución:

Se sigue el siguiente procedimiento:

1.- Encontrar el mínimo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores presentes.
m.c.m=15

2.- Se multiplica ambos miembros de la ecuación por el (m.c.m).

$$15 \left[3 - \frac{2x - 6}{3} + \frac{3x}{5} \right] = 15 [10 - x]$$

3.- Se aplican las operaciones según el orden.

$$45 - \frac{15(2x - 6)}{3} + \frac{15(3x)}{5} = 150 - 15x$$

$$45 - 5(2x - 6) + 3(3x) = 150 - 15x$$

$$45 - 10x + 30 + 9x = 150 - 15x$$

4.- Se agrupan los términos semejantes.

$$-10x + 9x + 15x = 150 - 45 - 30$$

$$14x = 75$$

5.- Se presenta la solución.

Dividimos ambos miembros entre 14:

$$14x/14 = 75/14$$

Resultando:

$$x = 75/14$$

EJEMPLO 7

1.- Determinar el valor de x en la ecuación:

$$\frac{1}{(2x-3)} = \frac{3}{(x+2)}$$

Solución:

Se sigue el siguiente procedimiento.

1.- Transformar la ecuación dada, en una ecuación lineal, suprimiendo los denominadores.

En este caso multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el m.c.m:

$$\text{m.c.m} = (2x - 3)(x + 2)$$

$$[(2x - 3)(x + 2)] \left[\frac{1}{(2x - 3)} = \frac{3}{(x + 2)} \right] [(2x - 3)(x + 2)]$$

Simplificando se obtiene:

$$x + 2 = 3(2x - 3)$$

2.- Presentar la solución.

Aplicamos distributiva respecto a 3 en el segundo miembro.

$$x + 1 = 6x - 9$$

Trasponemos 2 al segundo miembro

$$x - 6x = -9 - 2$$

Al simplificar se obtiene

$$-5x = -11$$

Multiplicamos por (-1) ambos miembros de la ecuación.

$$5x = 11$$

Trasponemos: 5

$$x = 11/5$$

Y al simplificar se obtiene:

$$x = 11/5$$

5.3.1.3. EJERCICIOS PROPUESTOS.**1.- Resolver las siguientes ecuaciones:**

a) $x - 7/2 = 4x + 5$

b) $3(x + 2) = 5x - 4$

c) $x / 2 - 3 = 3x - 2$

d) $3(x - 6) - 2(x + 5) = 20$

e) $\frac{2x-16}{5} + \frac{4x+6}{15} = \frac{4x-8}{20} - 1$

f) $\frac{7x-6}{4} - \frac{5x+3}{7} - \frac{6x-1}{14} = 13$

g) $3(3x - 4) - 12(5-x) = 23$

h) $2(x-1) + 3(x+4) = 4(x+1) - (x-5)$

5.3.2. ECUACIÓN CUADRÁTICA.

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, expresa la forma canónica de la ecuación de segundo grado.

3.2.1. DEFINICIÓN: Las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado con una incógnita se denominan así porque:

- Tienen una única incógnita.
- El grado de la incógnita es 2.

Una *ecuación de segundo grado* se puede expresar de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a , b y c números reales y a distinto de 0.

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a , b y c números reales y a distinto de 0.

EJEMPLO 8

Observe las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

b) $9 = x^2$

c) $x^2 - 2x = 0$

d) $x^2 = 3x - 6$

Como las ecuaciones: $9 = x^2$, $x^2 = 3x - 6$ no están expresadas en la forma canónica, podemos expresarlas en la misma, escribiéndolas así:

$9 = x^2$ se escribe: $x^2 + 9 = 0$

$x^2 = 3x - 6$ se escribe: $x^2 - 3x + 6 = 0$.

5.3.2.2 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS.

¿Cómo se resuelve una ecuación cuadrática?

Una ecuación cuadrática o de segundo, se puede resolver haciendo uso de la transposición de términos, y aplicando, según sea el caso:

- 1.- Factorización,
- 2.- Completación de cuadrados y
- 3.- La fórmula cuadrática.

EJEMPLO 9

1.- Determinar los valores de la siguiente ecuación: $x^2 - 16 = 0$

Solución:

1.- Se factoriza la expresión usando el producto notable suma por su diferencia; así,
 $x^2 - 16 = 0$

$$(x + 4)(x - 4) = 0$$

2.- Se iguala ambos factores a cero:

$$x + 4 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

3.- Se resuelven las ecuaciones lineales resultantes y así, obtenemos:

$$x = -4 \text{ y } x = 4$$

Importante:

Para factorizar a este tipo de expresiones, se hará uso del producto notable suma por su diferencia (diferencia de cuadrados): $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

Teorema matemático a ser utilizado (no se ha de demostrar): Si el producto de dos factores es igual a cero, entonces uno o ambos factores son iguales a cero.

EJEMPLO 10

1.- Determinar los valores de la siguiente ecuación: $x^2 - 16 = 0$

Solución:

Si:

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

Transponemos 1:

$$2x^2 - 2x = 1$$

Se divide entre 2 (número que representa el coeficiente de x^2), a la ecuación:

$$x^2 - x = 1/2$$

Le sumamos al primero y segundo término el cuadrado de la mitad del coeficiente de x que en este caso es $(-1/2)^2 = 1/4$:

$$x^2 - x + 1/4 = 1/2 + 1/4$$

Así:

$$(x - 1/2)^2 = 3/4$$

Luego ha de observarse que el número $3/4$ posee dos raíces cuadradas $\sqrt{3/4}$ y $-\sqrt{3/4}$, lo que significa que la variable $x - 1/2$ debe ser igual a cada una de las raíces cuadradas de $3/4$.

Es decir:

$$x - 1/2 = \sqrt{3/4}, -\sqrt{3/4}$$

De donde:

$$x = 1/2 + \sqrt{3/4} \text{ ó } x = 1/2 - \sqrt{3/4}$$

Por tanto las raíces son: $(1 + \sqrt{3})/2$ y $(1 - \sqrt{3})/2$, o cual puede comprobarse por sustitución directa en la ecuación original.

Procedimiento aplicado:

1. Se traspone el término constante al segundo miembro de la ecuación dejando en el primer miembro los términos que contienen la incógnita.
2. Se divide la ecuación entre el coeficiente de x^2 .
3. Para que el primer miembro resulte un cuadrado perfecto, se le suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x .
4. Para no alterar la ecuación, se debe asignar la misma cantidad al segundo miembro.

Importante:

Para completar el cuadrado, se hará uso de los productos notables: $(a+b)^2 = a^2 + 2a + b^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2a + b^2$$

Una completación de cuadrados se basa, en obtener una ecuación equivalente, cuyo primer miembro será un trinomio cuadrado perfecto que contenga la variable o incógnita.

EJEMPLO 11

1.- Determinar los valores de la siguiente ecuación: $x^2 + 5 = -3x$

Expresemos la ecuación en su forma canónica:

Ubiquemos los coeficientes de la variable: x^2 , x y el término independiente:

Donde:

$$b = 2, c = -5, a = 1$$

Sustituyamos en la fórmula:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 5,38}{2}$$

Así,

$$x = \frac{-3 + 5,38}{2} \sqrt{b^2 - 4ac} \quad y \quad x = \frac{-3 - 5,38}{2}$$

Importante: La fórmula cuadrática: Es una fórmula que satisface los dos valores correspondientes a la ecuación general de segundo grado; la cual resulta, del método de completar cuadrados a una ecuación del tipo cuadrática.

Fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5.3.2.3 EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Resolver las siguientes ecuaciones:

$$x^2 = 81$$

$$14x^2 - 28 = 0$$

$$(x + 6)(x - 6) = 13$$

$$(2x - 5)(2x + 5) - 119 = 0$$

$$(x + 11)(x - 11) = 23$$

$$x^2 = 7x$$

$$21x^2 + 100 = -5$$

$$2x^2 - 6x = 6x^2 - 8x$$

$$x^2 + 12x + 35 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 + 4x = 285$$

$$5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = -8$$

$$(x + 2)^2 = 1 - x(x + 3)$$

Nota: Ejercicios compilados.

5.4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Las expresiones dispuestas a continuación, representan un sistema de ecuaciones.

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ donde } a, a', b, b' \neq 0$$

Sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases} \text{ donde } a, a', a'', b, b', b'' \neq 0$$

5.4.1. DEFINICIÓN.

Un par o más de ecuaciones lineales, con dos o más incógnitas que se consideran simultáneamente, forman un sistema denominado: **Sistema de ecuaciones lineales.**

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones (lineales) que tienen más de una incógnita, y se pretenden resolver de manera simultánea. Las incógnitas se presentan en diversas de las ecuaciones, pero no necesariamente en todas. Lo que hacen estas ecuaciones es relacionar las incógnitas entre sí.

Con este sistema de ecuaciones, se persigue determinar el valor de cada una de las incógnitas. De allí que, una solución del sistema, es todo y cada uno de los valores de las variables que satisfacen al mismo tiempo sus

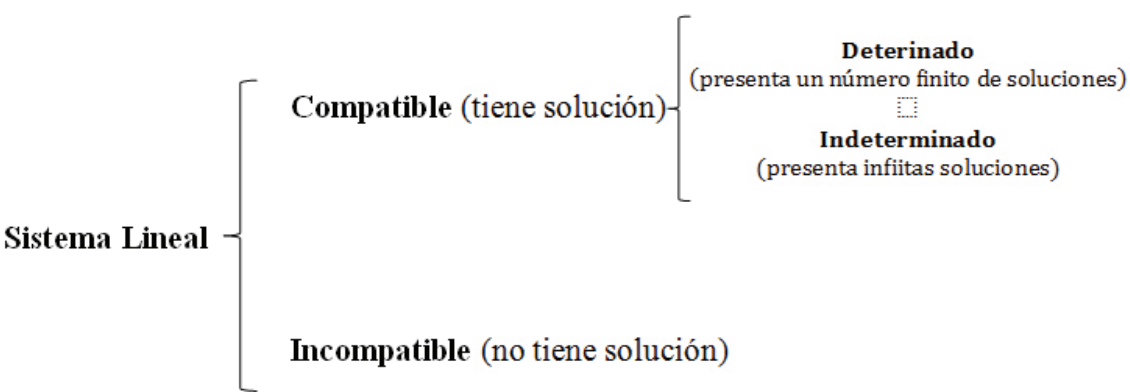
ecuaciones.

Es importante destacar que, según el número de soluciones los sistemas presentan una clasificación. Observe el siguiente diagrama de llaves:

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones (lineales) que tienen más de una incógnita, y se pretenden resolver de manera simultánea. Las incógnitas se presentan en diversas de las ecuaciones, pero no necesariamente en todas. Lo que hacen estas ecuaciones es relacionar las incógnitas entre sí.

Con este sistema de ecuaciones, se persigue determinar el valor de cada una de las incógnitas. De allí que, **una solución del sistema**, es todo y cada uno de los valores de las variables que satisfacen al mismo tiempo sus ecuaciones.

Es importante destacar que, según el número de soluciones los sistemas presentan una clasificación. Observe el siguiente diagrama de llaves:



5.4.2. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Para resolver un sistema de ecuación se hace uso de los tres métodos tradicionales ampliamente conocidos: sustitución, igualación y reducción.

Método de Sustitución:
1.- Despejar o aislar una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones.
2.- Sustituir la expresión de la incógnita en la otra ecuación.
3.-De este modo, obtendremos una ecuación de primer grado con la otra incógnita. Resolver la ecuación.
4.-Sustituir el valor obtenido de esta incógnita en una expresión que permita determinar el valor de la otra incógnita.

EJEMPLO 12

1.- Determinar el valor de las incógnitas en:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Solución:

Siguiendo los pasos del Método de Sustitución, se tiene:

1.- Se despeja y en la primera ecuación.	$y = 14 - x$
2.- Se sustituye la expresión de y en función de x, en la segunda ecuación.	$3x - y = 5$ $3x - (14 - x) = 5$
3.- Se resuelve la ecuación que tiene como incógnita la x.	$3x - 14 + x = 5$ $4x = 5 + 14$ $4x = 19$ $x = 19/4$
4.- Se sustituye el valor obtenido de x en la primera ecuación, para determinar el valor de y.	$x + y = 14$ $19/4 + y = 14$ $y = 14 - 19/4$ $y = \frac{56 - 19}{4}$ $y = 37/4$ Por lo tanto: $x = 19/4$ e $y = 37/4$

Método de Igualación:
1.- Despejar la misma incógnita en las ecuaciones.
2.- Igualar las expresiones de la incógnita despejada, obteniendo una ecuación con otra incógnita.

3.- Resolver la ecuación presente.

4.-Sustituir el valor obtenido de esta incógnita en una expresión del sistema que permita determinar el valor de la otra incógnita.

EJEMPLO 13

1.- Determinar el valor de las incógnitas en:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Solución:

Siguiendo los pasos del Método de Igualación, se tiene:

1.- Se despeja “y” en las dos ecuaciones.	En $x + y = 14$; $y = 14 - x$ En $3x - y = 5$; $-y = 5 - 3x$ $y = -5 + 3x$
2.- Se igualan las expresiones de y.	$14 - x = -5 + 3x$
3.-Se resuelve la ecuación que tiene como incógnita la x.	$14 - x = -5 + 3x$ $14 + 5 = 3x + x$ $19 = 4x$ $19/4 = x$
4.- Se sustituye el valor obtenido de x en la primera ecuación, para determinar el valor de y.	$x + y = 14$ $19/4 + y = 14$ $y = 14 - 19/4$ $y = \frac{56 - 19}{4}$ $y = 37/4$ Por lo tanto: $x = 19/4$ e $y = 37/4$

Método de Reducción
1.- Transformar el sistema de ecuaciones presentado, en otro sistema equivalente, de modo que los coeficientes de una de las incógnitas en las dos ecuaciones sean números opuestos.
2.- Sumar algebraicamente ambas ecuaciones.
3.- Resolver la ecuación en la que sólo se presenta una incógnita.
4.-Sustituir el valor obtenido de esta incógnita en una expresión del sistema que permita determinar el valor de la otra incógnita.

EJEMPLO 14

1.- Determinar el valor de las incógnitas en:

$$\begin{cases} 4x - 5y = 0 \\ x + 2y = 26 \end{cases}$$

Solución:

Siguiendo los pasos del Método de Reducción, se tiene:

1.- Se multiplica por (-4) la segunda ecuación para reducir x.	$4x - 5y = 0$ $(-4)(x + 2y) = 26(-4)$ $4x - 5y = 0$ $-4x - 8y = 104$
2.- Se suman ambas ecuaciones y se obtiene, una ecuación con una incógnita.	$4x - 5y = 0$ $-4x - 8y = 104$ $-13y = 104$
3.-Se resuelve la ecuación que tiene como incógnita la y.	$-13y = 104$ $13y = -104$ Así: $y = 104/13$

4.- Se sustituye el valor obtenido de y en la segunda ecuación, para determinar el valor de x.	$x + 2y = 26$ $x + 2(104/13) = 26$ $x + 208/13 = 26$ $x = 26 - 208/13$ $x = \frac{338 - 208}{13}$ $x = 130/13$ Por lo tanto: $x = 130/13$ e $y = 104/13$
--	---

5.4.3. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, aplicando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 12 \\ 4x - 2y = -24 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 15x - 11y = -87 \\ -12x - 5y = -27 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x - y = 7 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$

2.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, aplicando el método de igualación:

a) $\begin{cases} 12x + y = 58 \\ 8x - 5y = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 2y = -1 \\ -4x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x - y = -73 \\ 7x - y = 28 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 6 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{4} = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{6} = \frac{17}{2} \end{cases}$

3.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, aplicando el método de reducción:

$$a) \begin{cases} 7x - 2y = -1 \\ -4x + y = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - 3y = 10 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 5x + 9y = 34 \\ 3x + 2y = 17 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 6x - y = 7 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$$

5.5 INECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS.

5.5.1. CONCEPTOS BÁSICOS

A continuación se hará referencia a los conceptos de desigualdad e intervalo, dado que el concepto de inecuación gira en torno a estos dos conceptos.

5.5.1.1. DESIGUALDAD

Una Desigualdad es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra. Siendo cualquiera de estas cantidades un número real conocido, o bien, una expresión algebraica que representa un número real.

Símbolos Utilizados en la Desigualdad

Desigualdades Simples

$>$: mayor que

$<$: menor que

Desigualdades Compuestas

$\geq$: mayor o igual a

$\leq$: menor o igual a

5.5.1.2 INTERVALOS

Un intervalo representa un subconjunto infinito de números reales.

$$25 \leq x < 57 \text{ (esto es un intervalo de números reales)}$$

Se tiene dos tipos de intervalo: los finitos y los infinitos.

Intervalos Finitos: son los que están formados por todos los números reales comprendidos entre dos números reales conocidos llamados extremos del intervalo, que pueden o no pertenecer a él.

De acuerdo a la inclusión o no de los extremos del intervalo, los mismos se clasifican en:

Intervalo Abierto: Dados los números reales a y b que cumplen $a < b$, se define el conjunto

$$(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$$



Intervalo Cerrado: Dados los números reales a y b que cumplen $a \leq b$, se define el conjunto

$$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \}$$



Intervalo Semiabierto: Se identifican con la notación:

$$[a,b) = a \leq x < b$$



$$(a,b] = a < x \leq b$$



Intervalos Infinitos: Son aquellos donde se desconocen al menos uno de sus extremos.

Se presentan en éstos los símbolos $-\infty$ y $+\infty$, que sólo denotan infinitud. Son meramente sugestivos y no representan ningún número real.

Se identifican con la notación:

$$(a, +\infty) = a < x < +\infty$$



$$[a, +\infty) = a \leq x < +\infty$$



$$(-\infty, a) = -\infty < x < a$$



$$(-\infty, a] = -\infty < x \leq a$$



$$(-\infty, +\infty) = -\infty < x < +\infty$$



5.5.2. DEFINICIÓN DE INECUACIÓN

¿Qué es una Inecuación?

Las Inecuaciones son Desigualdades condicionales, por el hecho de que no son verdaderas para todo número real.

Una Inecuación es una desigualdad algebraica en la que sus miembros se encuentran vinculados a los símbolos: $<$ (menor que), $\leq$ (menor o igual a), $>$ (mayor que) o $\geq$ (mayor o igual a)

En este apartado, se hará referencia a solamente dos tipos de inecuaciones, que por el grado de la variable se denominan: inecuaciones lineales e inecuaciones cuadráticas con una sola incógnita.

Importante: Para dar solución a una inecuación, es necesario determinar el conjunto de los valores de la

variable que permite verificarla. De allí que la resolución requiere seguir pasos tales como se hace con la también resolución de ecuaciones, y el correcto uso de las propiedades particulares de las desigualdades.

Propiedades de las Desigualdades

Sean u, v, w y z números, variables o expresiones algebraicas reales, y sea c un número real.

Transitiva: Si $u < v$; $v < w \rightarrow u < w$

Suma: Si $u < v$, $\rightarrow u + w < v + w$
 Si $u < v$; $w < z \rightarrow u + w < v + z$

Multiplicación: Si $u < v$; $c > 0 \rightarrow uc < vc$
 Si $u < v$; $c < 0 \rightarrow uc > vc$

5.5.2.1 INECUACIÓN LINEAL.

Una Inecuación Lineal es aquella que puede expresarse de la forma: $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$ o $ax + b \geq 0$; donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

5.2.1.1 RESOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN LINEAL

Para resolver una inecuación lineal debemos determinar los valores de x para los cuales las desigualdades propuestas son válidas. Al igual que en las ecuaciones, se aplicaran las propiedades adecuadas para aislar la variable incógnita en un miembro de la desigualdad. De allí que el conjunto de soluciones de dicha desigualdad va a formar un intervalo de números reales.

EJEMPLO 15

1.- Determinar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $3(x-2) - 3 \leq 5(x+3)$

b) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} > \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$

Solución a)

$$3(x-2) - 3 \leq 5(x+3)$$

$$3x - 6 - 3 \leq 5x + 15$$

$$3x - 9 \leq 5x + 15$$

$$3x - 5x \leq 15 + 9$$

$$-2x \leq 24$$

$$2x \geq -24$$

$$x \geq -24/2$$

$$x \geq -12$$

El conjunto solución de la inecuación es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a -12. En notación de intervalos, el conjunto solución es: $[-12, +\infty)$

Al multiplicar o dividir una desigualdad por un número positivo, se conserva el sentido de dicha desigualdad. Al multiplicar o dividir una desigualdad por un número negativo, se invierte el sentido de dicha desigualdad.

Solución b)

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{3} > \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{4} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{2x - x}{4} > \frac{3 - 2}{6}$$

$$\frac{x}{4} > \frac{1}{6}$$

$$x > \frac{1}{6} \cdot 4$$

$$x > \frac{4}{6}$$

$$x > \frac{2}{3}$$

El conjunto solución es: $(\frac{2}{3}, +\infty)$

5.5.2.1.2 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $2x - 7 > 5x + 2$

$$b) 3x - 1 \leq 4x + 1$$

$$c) 4 \geq \frac{2x-5}{2} \geq -2$$

$$d) \frac{x}{3} + 1 \geq \frac{x}{2} - 3$$

$$e) 4(5-3x) + 3(2x-1) < 3x + 1$$

$$f) 2(1-x) + 5(1+x) \geq 7x - 1$$

$$g) 9x - 1 \leq 6x - 8$$

$$h) -1 \leq 3x + 2 < 7$$

$$i) \frac{2x-3}{2} + \frac{3x-1}{5} < x - 1$$

$$j) \frac{1}{2}(x-4) + 2(x+3) > \frac{1}{3}(x-3)$$

5.5.2.2 INECUACIÓN CUADRÁTICA.

Una Inecuación Cuadrática es aquella que puede expresarse de la forma: $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$ o $ax^2 + bx + c \geq 0$; donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a, b \neq 0$

5.5.2.2.1. RESOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN CUADRÁTICA

Existen diferentes procedimientos para determinar el conjunto solución de una inecuación, en los cuales se requerirá el cálculo de las raíces de las expresiones debidamente transpuestas si es el caso. En este sentido, se realizará la resolución de las inecuaciones cuadráticas mediante el estudio de signos.

Pasos:

Paso 1: Transponemos todos los términos al primer miembro de la desigualdad y efectuamos las simplificaciones del caso.

Paso 2: Determinar las raíces, y si las hay, se factoriza el trinomio.

Paso 3: Se construye una tabla, donde se representará un diagrama comparativo de signos, para determinar el signo del trinomio a partir de los signos de sus factores.

EJEMPLO 15

1.- Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 \leq 9$

b) $x^2 - x > 4$

Solución a)

$$x^2 \leq 9$$

$$x^2 - 9 \leq 0$$

$$(x - 3)(x + 3) \leq 0$$

Raíces: $x = -3$ y $x = 3$

Intervalos	$(-\infty, -3]$	$[-3, 3]$	$(3, +\infty)$
Valor Asignado	-4	0	4
Signo para: $(x - 3)$	-	-	+
Signo para: $(x + 3)$	-	+	+
Signo para: $(x^2 - 9)$	+	-	+

El conjunto solución, es el asociado al intervalo de la casilla donde está el signo negativo como resultado de los signos para los factores $(x - 3)(x + 3)$. Por tanto el conjunto solución es el intervalo: $[-3, 3]$

Solución b)

$$x^2 + 2x > 8$$

$$x^2 + 2x - 8 > 0$$

$$(x - 2)(x + 4) > 0$$

Raíces: $x = -4$ y $x = 2$

Intervalos	$(-\infty, -4)$	$(-4, 2)$	$(2, +\infty)$
Valor Asignado	-5	0	4
Signo para: $(x-2)$	-	-	+

Signo para: (x+4)	-	+	+
Signo para: (x-2)(x+4)	+	-	+

El conjunto solución, es el asociado al intervalo de la casilla donde están los signos positivos como resultado de los signos para los factores $(x - 2)(x + 4)$. Por tanto el conjunto solución es el intervalo: $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

5.5.2.2.2 EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 \leq 4$

b) $x^2 > 81$

c) $14x^2 - 28 \geq 0$

d) $(x + 6)(x - 6) < 13$

e) $(2x - 5)(2x + 5) - 119 > 0$

f) $x^2 \leq 7x$

g) $x^2 - 2x - 15 > 0$

h) $2x^2 - 7x + 3 \leq 0$

i) $x^2 + 12x + 35 < 0$

j) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

CAPÍTULO VI.

MATRICES

En este capítulo, se dispone la definición de matriz y algunas de las operaciones básicas realizadas con matrices, debidamente seleccionadas del extenso campo de las mismas.

6.1 DEFINICIÓN DE MATRIZ

Una matriz A es un arreglo o imposición rectangular de números, si el arreglo tiene “ m ” renglones (horizontales) y “ n ” columnas (verticales) entonces se llama matriz $m \times n$ (se lee matriz m por n).

El tamaño de una matriz se define como $m \times n$ (llamada también dimensión).

A la matriz se le conoce como un arreglo bidimensional de mn números organizados en m filas y n columnas.

6.2. NOTACIÓN

Las matrices se denotan con letras mayúsculas, y los elementos o componentes con letras minúsculas afectadas por dos subíndices.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mj} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m = \text{filas}$
 $n = \text{columnas}$

6.3 TIPOS DE MATRIZ

Matriz Cuadrada: Es una matriz $m \times n$ con $m = n$.

Matriz Cero: Es una matriz $m \times n$ con todas sus componentes iguales a cero.

Matrices Iguales: Dos matrices y son iguales si: **1)** tienen el mismo tamaño y **2)** sus componentes correspondientes son iguales.

Matriz Rectangular: Es un arreglo de números distribuidos en filas y columnas, encerrados entre paréntesis, corchetes o barras dobles.

EJEMPLO 1

Ejemplo: Sean los vectores $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$; y. Las componentes de estos vectores se

pueden colocar ordenadamente formando lo que en matemáticas se llama, un arreglo rectangular.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

En atención al ejemplo observe:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada (2x2)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz (3x2)

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz (2x3)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz (3x3)

Matriz Diagonal: Una matriz cuadrada A se llama matriz diagonal si todas sus componentes distintas de cero están en las diagonales.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A , B , C y D son diagonales; mientras que E , no lo es.

Una matriz diagonal puede tener uno o más ceros en su diagonal.

Matriz Triangular Superior: Una matriz cuadrada se llama triangular superior si todas sus componentes que se encuentran debajo de los elementos de la diagonal son cero.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior: Se dice que una matriz cuadrada es triangular inferior si todas las componentes que se encuentren arriba de la diagonal son cero.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6.4. OPERACIONES CON MATRICES

6.4.1. SUMA DE MATRICES

Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ dos matrices $m \times n$, la suma $A+B$ de dos matrices es la matriz $m \times n$.

$$A+B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{1j} + b_{1j} & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{2j} + b_{2j} & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mj} + b_{mj} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta suma es aplicable para la suma de dos matrices A y B solamente si dichas matrices son del mismo tamaño.

EJEMPLO 2

a) Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 11 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 3 & 15 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Determine la suma: $A + B$.

Solución:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+6 & 8+(-7) \\ 11+3 & 4+15 \\ 0+2 & 9+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 14 & 19 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$$

b) Sean,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 4 \\ 9 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A + B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + (-1) & 3 + 2 \\ 1 + (-\frac{1}{2}) & \frac{2}{3} + 4 \\ 0 + 9 & 9 + (-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{14}{3} \\ 9 & \frac{26}{3} \end{pmatrix}$$

Teorema 1.

Sea A, B, C. matrices $m \times n$. Sea 0 la matriz cero de $m \times n$. Entonces:

- a) $A + 0 = A$ (Identidad Aditiva)
- b) $A + B = B + A$ (Conmutativa de la Adición)
- c) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Asociatividad de la Adición)
- d) $A + A = 2^a$

6.4.2 MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$ y “c” cualquier número real. Entonces: $c \cdot A$ es la matriz $m \times n$ dada por:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad c \cdot A = c \cdot (a_{ij}) = c \cdot a_{ij} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & c \cdot a_{2n} \\ c \cdot a_{m1} & c \cdot a_{m2} & c \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 3

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 8 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 & 2 \\ -4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 9 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

y los escalares: $\alpha = 2$, $\beta = -3$ y $\Theta = -4$, obtener las operaciones siguientes:

a) $\alpha.A$

b) $\beta.D$

c) $\Theta.B$

d) $\alpha.B + \beta.C$

e) $\Theta.A + \beta.D$

$$\text{a) } (2) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 8 & 12 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 14 \\ 16 & 24 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } (2) \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 & 2 \\ -4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 12 & 4 \\ -8 & -6 & 2 & 0 \\ 4 & -14 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(-3) \begin{pmatrix} 10 & 9 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -27 & 9 & 6 \\ -12 & -18 & -21 & -15 \\ 3 & 0 & 15 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\beta + \beta C = \begin{pmatrix} -20 & -18 & 6 & 4 \\ -8 & -12 & -14 & -10 \\ 2 & 0 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Nota: A su juicio para la solución, quedan las operaciones b), c) y e).

Teorema 2.

Sean A y B matrices $m \times n$ y 0 la matriz cero $m \times n$. Sean c y d escalares arbitrarios y 0 y 1 los escalares identidad de la suma y multiplicación, respectivamente. Entonces:

$$\text{a) } c.(A+B) = c.A + c.B$$

$$\text{b) } (c+d).A = c.A + d.A$$

- c) $(c \cdot d) \cdot A = c \cdot (d \cdot A)$
- d) $1 \cdot A = A$
- e) $0 \cdot A = 0_{m \times n}$, donde 0 cero es el número real nulo.

6.4.3 DIFERENCIA DE MATRICES

Sea $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ y dos matrices cuadradas $m \times n$. La diferencia $A-B = A + (-1) \cdot B$.

$$B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij}) + (-1)(b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + (-1)b_{11} & a_{12} + (-1)b_{12} & a_{1n} + (-1)b_{1n} \\ a_{21} + (-1)b_{21} & a_{22} + (-1)b_{22} & a_{2n} + (-1)b_{2n} \\ a_{m1} + (-1)b_{m1} & a_{m2} + (-1)b_{m2} & a_{mn} + (-1)b_{mn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 4

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Calcular:

- a) $A-B$ b) $B-A$

Solución:

a)

$$A =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -8 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 8 & -5 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

6.4.4 PRODUCTO DE MATRICES

Sean **A** una matriz $m \times n$ y **B** una matriz de $r \times n$. El producto **A.B** es la matriz $m \times n$ cuya componente ij -ésima

es el producto del renglón i -ésimo de A y la columna j -ésima de B .

EJEMPLO 5

a) Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:

Para la solución, obsérvese los pasos aplicados en la siguiente ilustración dadas dos matrices A y R :

1. Comprobar que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda, para así determinar que el producto existe, así:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$p = q$

2. Multiplicar los elementos de la fila de la primera matriz por los de la columna de la segunda como se observa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A \cdot R = \begin{bmatrix} 3(3) + 2(1) + 4(2) & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A \cdot R = \begin{bmatrix} 3(3) + 2(1) + 4(2) & 3(9) + 2(1) + 4(5) \\ 6(3) + 7(1) + 1(2) & \dots \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A \cdot R = \begin{bmatrix} 3(3) + 2(1) + 4(2) & \dots \\ 6(3) + 7(1) + 1(2) & \dots \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

3. Construir la matriz resultante con las filas y columnas, según el orden identificado. En este caso A.R resultará:

$$A.R = \begin{bmatrix} 19 & 49 \\ 27 & 66 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Así:

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 + 3.6 & 2.0 + 3.8 \\ (-1).5 + 1.6 & (-1).0 + 1.8 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 28 & 24 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Para que el producto A.B de dos matrices esté definido, sus tamaños deben ser compatibles, es decir, que el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B.

La dimensión mxn de A.B es el número de renglones de A por el número de columnas de B.

Teorema 5:

Sean las matrices: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, y entonces:

- a) $A.B \neq B.A$ (no conmutativa)
- b) $(A.B).C = A.(B.C)$ (si asociativa)

6.4.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 7 \\ -4 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & 7 & 3 \\ -2 & 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinar la suma: a) $A + B$ y b) $7B + 5A$

2.- Sean las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 2 & -9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular: a) $3(C-D)$, b) $(-2).D-C$

3.- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular: $A.B$

4.- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 7 \\ 8 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Obtener: $A.B$

5.- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular: a) A.B , b)B.A

6.- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular: (A.B).C

7.- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 9 & 2 & -7 \\ 6 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Calcular: 2(A).B

CAPÍTULO VII.

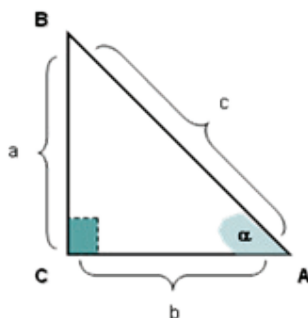
TRIGONOMETRÍA

Al conjugar los términos griegos trigonon que significa triángulo y metron medida, resulta la palabra Trigonometría, cuyo significado es medición de ángulos. En la antigüedad, la trigonometría se utilizaba en agrimensura, navegación y astronomía, para determinar relaciones entre las longitudes de los lados y medición de ángulos. En la actualidad todavía es utilizada con estos fines y en estos casos las funciones trigonométricas tienen la medida angular como sus dominios.

7.1 DEFINICIÓN DE TRIÁNGULO

Un triángulo representa un polígono formado por tres lados y tres ángulos.

La figura presentada es un triángulo que se llama rectángulo, porque uno de sus ángulos es recto.



a es el cateto opuesto (co) para el ángulo α , **b** es el cateto adyacente (ca) para el ángulo α y **c** es la hipotenusa del triángulo ABC.

En base a este triángulo se conoce una relación muy famosa; el Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$. Que geométricamente expresa la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

A cada una de las razones $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{a}{b}$, que se pueden obtener dividiendo entre sí dos de los lados de un triángulo rectángulo, se le llama razón trigonométrica o cociente trigonométrico, denominándoseles:

7.2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

seno:	$\text{sen } \alpha = a/c$
coseno:	$\text{cos } \alpha = b/c$
tangente:	$\text{tan } \alpha = a/b$
secante:	$\text{sec } \alpha = c/a$
cosecante:	$\text{csc } \alpha = c/b$
cotangente:	$\text{cot } \alpha = b/a$

Las seis razones trigonométricas están determinadas en forma única ya que las mismas dependen del ángulo α y no del tamaño del triángulo en consideración. En este sentido, las razones trigonométricas son funciones de α

y reciben el nombre de Funciones Trigonoátricas.

Además, se cumple entre otras las siguientes identidades trigonométricas:

7.3 IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS FUNDMENTALES

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

$$\tan \alpha = \text{sen } a / \cos a$$

$$\text{sen} 2\alpha = 2 \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$$

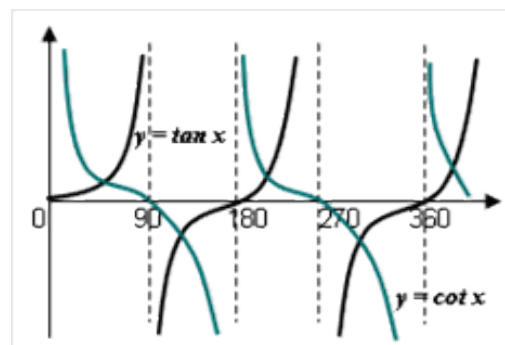
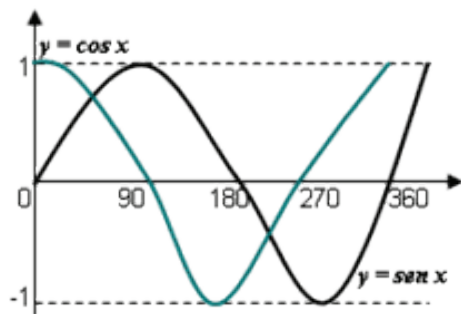
$$\tan a \cdot \cot a = 1$$

$$\cot \alpha = \cos a / \text{sen } a$$

7.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: ALGUNOS VALORES ESPECIALES

En este caso no seremos todo lo profundo que podemos debido a que su estudio debe ser muy detallado. En la siguiente tabla se presentan los valores indicados, como resultado de lo introducido en un sistema de coordenadas cartesiano y la noción de circunferencia trigonométrica o círculo unitario.

Funciones	0°	90° = $\frac{\pi}{2}$	180° = π	270° = $\frac{3\pi}{2}$	360° = 2π
sen x	0	1	0	-1	0
cos x	1	0	-1	0	1
tan x	0	∞	0	∞	0
cot x	∞	0	∞	0	∞
sec x	1	∞	-1	∞	1
cosec x	∞	1	∞	1	∞



Otros Valores muy Usuales:

Funciones	30° = $\frac{\pi}{6}$	45° = $\frac{\pi}{4}$	60° = $\frac{\pi}{3}$
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

tan x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
--------------	----------------------	---	------------

Signo de las Razones Trigonométricas

Cuadrante	sen x	cos x	tan x
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-

CAPÍTULO VIII.

SUCESIONES

8.1 DEFINICIÓN DE SUCESIÓN

Fibonacci (1175-1250) supuso en uno de sus estudios, que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que después de dos meses cada nueva pareja se comportaba del mismo modo. Así pues, el número a_n de parejas nacidas en el n -ésimo mes es $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, puesto que nace una pareja por cada pareja nacida en el mes anterior, y además cada pareja nacida hace dos meses produce una nueva pareja.

En base a lo anterior, podríamos decir que una sucesión es una lista de eventos, objetos o números en un orden definido; es decir., es un conjunto ordenado de elementos.

EJEMPLO 1

- a) 1, 2, 3, ..., 8
- b) Enero, Febrero, Marzo, Abril,, Diciembre

Una sucesión es definida o establecida si y solo si existe una regla dada que determina el término n -ésimo correspondiente a un número entero positivo.

Cada elemento que corresponde a la lista o sucesión se denomina **TÉRMINO DE LA SUCESIÓN**. Si analizamos el primer ejemplo podemos decir que tiene 8 términos, mientras que en el segundo ejemplo corresponden a 12 términos.

Los elementos o términos de una sucesión se representan a través de una misma letra con su respectivo sub-índice, que indica el número de orden de cada uno de los términos.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

Donde a_1 representa el primer término, a_2 representa el segundo término, a_3 representa el tercer término, a_n representa el término n -ésimo de la sucesión o también llamado **TÉRMINO GENERAL DE LA SUCESIÓN**.

8.1.2 Tipos de Sucesión

Una sucesión puede ser:

- a.- Sucesión Finita
- b.- Sucesión Infinita

8.1.2.1 Sucesión Finita

Se llama sucesión finita aquella que contiene n términos, es decir, tiene principio y fin. (Se conoce tanto el primero como el último término).

Sucesión en la que el número de términos es limitado, es decir, la sucesión termina y existe un último término de la sucesión

EJEMPLO 2

4, 5, 6, 7

En este ejemplo existen 4 términos en la sucesión, la cual podemos concluir que es sucesión finita ya que tiene un principio (primer término 4) y tiene un fin (último término 7).

8.1.2.2 Sucesión infinita

Se llama sucesión infinita cuando existe un principio y no se conoce o indica el último término.

Sucesión en la que el número de términos es infinita es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

EJEMPLO 3

a) 1, 2, 3, ...

b) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ...

Analizando estos ejemplos nos damos cuenta que cada uno de ellos tienen un principio (primer término), pero no tienen un último término. Los tres puntos se llaman **elipsis** e indican que los términos siguientes tienen el mismo patrón que el establecido, por los ya dados.

Los términos de una sucesión pueden ubicarse en correspondencia uno a uno con el conjunto N de números enteros positivos. Ejemplo:

5,	10,	15,	20,	...
↓	↓	↓	↓	
1	2	3	4	...

Debido a esta propiedad de correspondencia, podemos establecer una definición de sucesión matemáticamente hablando:

Sucesión es una función f cuyo dominio es el conjunto N de enteros positivos.

Los elementos del rango de una sucesión son específicamente los términos de la sucesión. A partir de ahora el rango de una sucesión es un conjunto de números reales.

EJEMPLO 4

1.- Enumere los primeros cuatro términos de la sucesión cuyo término general está dado:

a) $a_n = 3^n$

Solución: $a_n = 3^1, 3^2, 3^3, 3^4 = 3, 9, 27, 81$

b) $a_n = \frac{1}{n}$

b) Solución: $a_n = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

8.1.2.3 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- En cada uno de los siguientes ejemplos se proporciona el término general de una sucesión. Encuentra los primeros dos términos, el octavo y el décimo cuarto.

a.- $a_n = 2^n$

b.- $a_n = (-1)^n n^2$

c.- $a_n = n^2$

d.- $a_n = \frac{n}{n+1}$

8.2 FÓRMULAS DE RECURRENCIA

Algunas sucesiones se pueden definir recursivamente. Primero se da el valor de a_1 (primer término), después se indica cómo se relaciona cada término subsiguiente con el que precede en la sucesión.

EJEMPLO 5

1.-Enumere los primeros cuatro términos de la sucesión definida por:

$a_1 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + 2$

Solución:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1+2 = 3$

$a_3 = 3+2 = 5$

$a_4 = 5+2 = 7$

La sucesión sería: 1, 3, 5, 7

EJEMPLO 6

1.-Enumere los primeros cinco terminas de la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = (n+2) a_n$$

$$a_1 = 2 \quad n = 1, 2, 3, 4$$

Solución:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = (1+2)(2) = 6$$

$$a_3 = (2+2)(6) = 24$$

$$a_4 = (3+2)(24) = 120$$

$$a_5 = (4+2)(120) = 720 \quad \text{Los 5 primeros términos son: 2, 6, 24, 120, 720}$$

8.2.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Encuentra los cinco primeros términos de la sucesión definida por:

a.- $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 a_n - 1$

b.- $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + (n+2)$

c.- $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 4$

d.- $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = (-1)^n n a_n$

8.3 DETERMINACIÓN DE TÉRMINOS GENERALES

Nosotros podemos conocer los primeros términos de una sucesión, pero no necesariamente su término general; para lo cual debemos buscar un patrón establecido para obtener el término general de la sucesión.

EJEMPLO 7

a) Para cada sucesión encuentre su término general 1 , 4 , 9 , 16 , 25

Solución: Los elementos de la sucesión son números cuadrados, de modo que una regla para obtener el enésimo término sería:

$$a_n = n^2$$

b) Para cada sucesión encuentre su término general - 1 , 2 ,- 4 , 8 ,-16

Solución: Si ignoramos los signos negativos tenemos potencias de 2, cuyo término general

$$a_n = 2^{n-1}$$

Podemos multiplicar cada término por $(-1)^n$. Este factor multiplicara cada término impar por - 1 y cada término par por 1. De este modo el término general lo escribiremos como:

$$a_n = (-1)^n 2^{n-1}$$

8.3.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Para cada una de las siguientes sucesiones, encontrar su término general.

a.- 2, 4, 6, 8, 10

b.- 0, 1, 2, 3, 4, 5

c.- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

d.- 8, 27, 81, 125

TALLER 1

a.- En cada uno de los siguientes ejemplos se proporciona el término general de una sucesión. Encuentra los primeros tres términos, el noveno el décimo quinto:

1.- $a_n = 3n + 1$

6.- $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

2.- $a_n = n + \frac{1}{n+4}$

7.- $a_n = (-1)^n(3n+1)$

3.- $a_n = (-2)^n$

8.- $a_n = (-3)^{n-1}$

4.- $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

9.- $a_n = \frac{n}{3n+2}$

5.- $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

10.- $a_n = n^2 + 1$

b.- En los problemas siguientes enumere los cinco primeros términos de la sucesión definida por la formula de recurrencia.

1.- $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4a_n - 3$

2.- $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + (a_n + 2)$

3.- $a_1 = -3$, $a_{n+1} = 2a_n - 5$

4.- $a_1 = 8$, $a_{n+1} = a_{n+2}$

5.- $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

6.- $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$

$$7.- a_1 = 2, \quad a_{n+1} = (a_n)^n$$

$$8.- a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n$$

$$9.- a_1 = 5, \quad a_{n+1} = n a_n$$

$$10.- a_1 = 2, \quad a_{n+1} = (a_n)^n$$

c.- Para cada una de las siguientes sucesiones, encontrar su término general.

$$1.- -1, 1, 3, 5, 7$$

$$2.- -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$3.- 5, 7, 9, 11, 13$$

$$4.- -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$$

Luego de analizar las sucesiones, ahora vamos a establecer que es una progresión.

Se llaman progresiones a ciertas sucesiones cuya ley de formación es simple; es decir tienen ciertas reglas específicas.

Las progresiones se clasifican en:

1.- Progresiones aritméticas

2.- Progresiones geométricas

8.4 PROGRESIONES ARITMÉTICAS

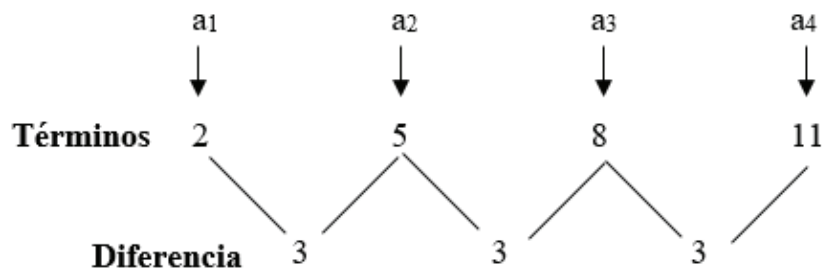
8.4.1 Definición

Una progresión aritmética es aquella por la cual a cada término de la misma se suma una constante (d) para obtener el siguiente término. La constante d se llama **DIFERENCIA COMÚN**.

La diferencia (d) puede ser un número positivo, negativo o nulo. Para encontrar la diferencia común, se resta a cualquier término el que le precede.

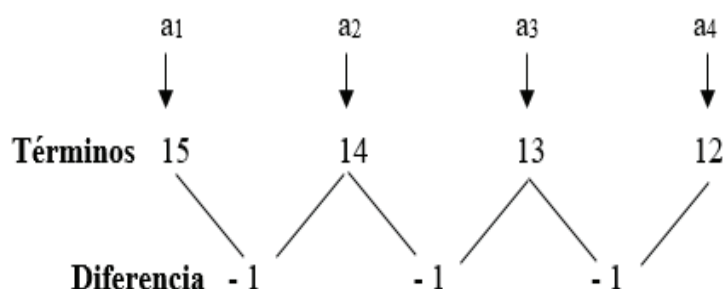
Según la diferencia ya sea esta **POSITIVA** o **NEGATIVA** la progresión se dice que es **CRECIENTE** o **DECRECIENTE**.

EJEMPLO 8



En este primer ejemplo podemos notar que es una progresión aritmética creciente ya que la diferencia es un número positivo; en este caso 3.

EJEMPLO 9



En este segundo ejemplo analizamos que es una progresión aritmética decreciente ya que la diferencia es un número negativo; en este caso - 1.

8.4.1.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Dadas las siguientes progresiones o sucesiones aritméticas encontrar su diferencia común y establecer si es creciente o decreciente.

- a.- 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ,...
- b.- 10 , 9 $\frac{1}{2}$, 9 , 8 $\frac{1}{2}$, 8 , 7 $\frac{1}{2}$,...
- c.- 19 , 14 , 9 , 4 , - 1 , - 6 ,...
- d.- 6 , 9 , 12 , 15 , 18 ,...
- e.- 0,2 , 0,7 , 1,2 ,...
- f.- $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$

8.4.2 Término enésimo de una progresión aritmética

Si decimos que a_1 es el primer término de una progresión aritmética, los siguientes términos de la progresión serán:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

y así sucesivamente.

Por consiguiente el **ENÉSIMO TERMINO** de una progresión o sucesión aritmética está dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

EJEMPLO 10

Encontrar el décimo término de la progresión aritmética 4, 7, 10, 13,...

Solución:

DATOS

$$\begin{array}{ll} a_1 = 4 & a_{10} = 4 + (10 - 1) 3 \\ d = 3 & a_{10} = 4 + 9 (3) \\ n = 10 & a_{10} = 31 \end{array}$$

EJEMPLO 11

En la progresión aritmética 4, 7, 10, 13, ... ¿Que termino tiene un valor igual a 301?

Solución:

DATOS

$$\begin{array}{ll} a_1 = 4 & a_n = a_1 + (n - 1) d \\ d = 3 & 301 = 4 + (n - 1) 3 \\ a_n = 30 & 301 = 4 + 3n - 3 \\ n = ? & 301 - 4 + 3 = 3n \\ & 300 = 3n \\ & n = 100 \end{array}$$

EJEMPLO 12

Un individuo decide trotar una distancia particular por semana, acorde con el siguiente horario: la primera semana trotara 1.000 mts por día. Cada semana siguiente trotara 250 mts por día de lo que troto la semana anterior.

a.- Que distancia recorrerá por día en la semana numero 26.

b.- En cual semana trotara 10.000 mts por día.

Solución:

DATOS

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1000 & a_n = a_1 + (n - 1) d \\ d = 250 & a_{26} = 1000 + (26 - 1) 250 \\ n = 26 & a_{26} = 1000 + (25) 250 \end{array}$$

$$a_n = ? \quad \begin{aligned} a_{26} &= 1000 + 6250 \\ a_{26} &= 7.250 \text{mts.} \end{aligned}$$

DATOS

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.000 & a_n &= a_1 + (n - 1) d \\ a_n &= 10.000 & 10.000 &= 1.000 + (n - 1) 250 \\ d &= 250 & 10.000 &= 1.000 + 250n - 250 \\ n &= ? & 10.000 - 1.000 + 250 &= 250n \\ & & 9.250 &= 250n \\ & & n &= 37 \end{aligned}$$

EJEMPLO 13

El sexto término de una progresión aritmética es 3 y su diferencia es - 2. Encontrar el primer término de la progresión.

Solución:

DATOS

$$\begin{aligned} a_6 &= 3 & a_n &= a_1 + (n - 1) d \\ d &= - 2 & 3 &= a_1 + (6 - 1)(- 2) \\ n &= 6 & 3 &= a_1 + (5)(- 2) \\ a_1 &= ? & 3 &= a_1 - 10 \\ & & 3 + 10 &= a_1 \\ & & a_1 &= 13 \end{aligned}$$

8.4.2.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

a.- Hallar el 25^{avo} termino de - 6 , - 3 , 0,...

b.- Una progresión aritmética comienza por 2, termina por 3 y su diferencia es 1/10. ¿Cuántos términos hay en la progresión?

c.- Encontrar el 12 término de la progresión aritmética 7, 4 , 1 ,...

d.- Una pareja decide ahorrar \$10 cada mes del primer año de matrimonio, \$25 cada mes del segundo año de matrimonio, \$40 cada mes del tercer año de matrimonio, y así sucesivamente aumentando \$15 la cantidad mensual cada año. Hallar la cantidad que deberá ahorrar cada mes del año décimo.

e.- En la progresión 2, 6, 10, 14,..., ¿Cuál de sus términos tiene un valor igual a 286?

8.4.3 Construcción de progresiones aritméticas

El objetivo fundamental es la construcción de una progresión aritmética dados algunos términos de la misma.

EJEMPLO 14

Si el décimo término de una progresión aritmética es 42 y el término vigésimo primero es 75, entonces cual será el término trigésimo primero. Construir la sucesión.

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

$$42 = a_1 + (10 - 1) d$$

$$75 = a_1 + (21 - 1) d$$

$$42 = a_1 + 9d$$

$$75 = a_1 + 20d$$

$$-1 \begin{cases} a_1 + 9d = 42(1) \\ a_1 + 20d = 75(1) \end{cases}$$

$$a_1 + 9d = 42 (1)$$

$$a_1 + 9(3) = 42$$

$$a_1 = 42 - 27$$

$$a_1 = 15$$

$$- a_1 - 9d = - 42$$

$$a_{31} = a_1 + 30 d$$

$$a_1 + 20d = 75$$

$$a_{31} = 15 + 30 (3)$$

$$// \quad 11d = 33$$

$$a_{31} = 15 + 90$$

$$d = 3$$

$$a_{31} = 105$$

La sucesión sería 15 , 18 , 21 , 24 , 27 , 30 , 33 , 36 ,...

8.4.3.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

a.- El tercer término de una progresión aritmética es 8 y el décimo sexto término es 47. Encontrar a_1 y d ; además construir la sucesión.

b.- Si el cuarto término de una progresión aritmética es 5 y el noveno término es 20, obtener el sexto término.

c.- El séptimo término de una progresión aritmética es 79 y el décimo tercero es 151, obtener el cuarto termino.

d.- El décimo séptimo término de una progresión aritmética es , y el trigésimo segundo término es ; encontrar a_1 y d , además construir la sucesión.

e.- En una progresión aritmética que se compone de 5 términos, el primero es 7 y el último es 9. Hallar la diferencia y construir la progresión.

8.4.4 Media Aritmética

En una progresión aritmética finita el primero y último término se llaman extremos, y todos los demás términos entre uno y otro extremo se llaman medios.

Si una progresión aritmética finita tiene tres términos, a , b , c , el segundo término se llama **MEDIA ARITMETICA** de a y c .

EJEMPLO 15

En la progresión 1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16 los extremos serían 1 y 16 y sus medios aritméticos serían 4 , 7 , 10 y 13.

En otras palabras podremos definir que la media aritmética de dos números es igual a su semisuma:

$$m = a + \frac{b}{2}$$

Interpoliar varios medios aritméticos entre dos números dados es construir la progresión. Para construir la progresión se debe conocer la diferencia, la cual se determina de la siguiente fórmula:

Si $a_n = a_1 + (n - 1) d$; y despejamos el valor de la diferencia (d), tenemos:

$$d = \frac{a_n + a_1}{n - 1}$$

EJEMPLO 16

Insertar cuatro medios aritméticos entre 1 y 2.

Solución:

DATOS

$$a_1 = 1$$

$$a_n = 2$$

$$n = 6$$

$$d = \frac{a_n + a_1}{n - 1}$$

$$d = \frac{2-1}{6-1} = \frac{1}{5}$$

$$d = \frac{1}{5}$$

$$m_1 = a_1 + d = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

$$m_2 = m_1 + d = \frac{6}{5} + \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$$

$$m_3 = m_2 + d = \frac{7}{5} + \frac{1}{5} = \frac{8}{5}$$

$$m_4 = m_3 + d = \frac{8}{5} + \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$

La progresión aritmética es $1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2$

EJEMPLO 17

Interpolar seis medios aritméticos entre 3 y 38

Solución:

DATOS

$$a_1 = 3$$

$$a_n = 38$$

$$n = 8$$

$$d = \frac{a_n + a_1}{n-1}$$

$$d = \frac{38 - 3}{8 - 1} = \frac{35}{7}$$

$$d = 5$$

$$m_1 = a_1 + d = 3 + 5 = 8$$

$$m_2 = m_1 + d = 8 + 5 = 13$$

$$m_3 = m_2 + d = 13 + 5 = 18$$

$$m_4 = m_3 + d = 18 + 5 = 23$$

$$m_5 = m_4 + d = 23 + 5 = 28$$

$$m_6 = m_5 + d = 28 + 5 = 33$$

8.4.4.1. EJERCICIOS PROPUESTOS

- 1.- Insertar dos medios aritméticos entre 3 y 24.
- 2.- Interpolar ocho medios aritméticos entre 18 y -9
- 3.- Interpolar seis medios aritméticos entre $2x - 3y$ y $9x + 4y$
- 4.- Insertar nueve medios aritméticos entre 2 y -1
- 5.- Insertar dos medios aritméticos entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{8}$

8.4.5 Series Aritméticas

Es una serie asociada a una sucesión aritmética; es decir, es la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética (S_n); está representada por la siguiente fórmula:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

En otras palabras, la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética es n veces el promedio de los términos primero y n -ésimo de la progresión.

PARA RECORDAR

Esta fórmula es útil cuando conocemos el primero y último término de la sucesión, a_1 y a_n . Si no conocemos el último término de la serie podemos sustituir en:

$a_n = a_1 + (n - 1)d$; en vez de a_n en la fórmula anterior; lo que va a dar lugar a la siguiente fórmula:

$$S_n = \frac{n[a_1 + a_1 + (n - 1)d]}{2}$$

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n - 1)d]}{2}$$

EJEMPLO 18

Hallar la suma de los primeros 50 números enteros positivos 1 2,3,...50

Solución:

DATOS:

$$\begin{aligned}a_1 &= 1 \\a_n &= 50 \\n &= 50\end{aligned}$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{50} = \frac{50(1 + 50)}{2}$$

$$S_{50} = \frac{50(51)}{2}$$

$$S_{50} = 1.275$$

EJEMPLO 19

La suma de los 8 primeros términos de una progresión es 96. La progresión comienza por - 2; ¿Cuánto equivale el último termino?

Solución:

DATOS

$$n = 8$$

$$S_8 = 96$$

$$a_1 = -2$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$96 = \frac{8(-2 + a_n)}{2}$$

$$192 = 8(-2 + a_n)$$

$$192 = -16 + 8a_n$$

$$192 + 16 = 8a_n$$

$$208 = 8a_n$$

$$a_n = \frac{208}{8}$$

$$a_n = 26$$

EJEMPLO 20

Obtener la suma de los primeros 14 términos de la serie aritmética 2 +5+8+11+14+...

Solución:

DATOS

$$a_1 = 2$$

$$n = 14$$

$$d = 3$$

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

$$S_{14} = \frac{14[2(2) + (14-1)3]}{2}$$

$$S_{14} = \frac{14[4 + 39]}{2}$$

$$S_{14} = 301$$

8.4.6. Notación Sigma

La letra griega $\sum$ (sigma) se la puede utilizar para abreviar la escritura cuando una serie tiene una fórmula para el término general.

La suma de los primeros cinco términos de la progresión:

- 1 , - 4 , - 7 , - 10 , - 13, ... - $3n + 2$, se puede denotar de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^5 (-3n + 2) \text{ “Se lee la suma de } (-3n + 2) \text{ cuando } n \text{ va desde 1 hasta 5”}$$

EJEMPLO 21

Rescribe y evalúa la siguiente suma

$$\text{Solución: } 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

EJEMPLO 22

Escribe la siguiente suma en notación sigma $1 + 4 + 9 + 16 + \dots$

Solución: Este ejercicio se trata de la suma de los cuadrados de los números reales, en este caso nos damos cuenta que es infinita la progresión, para lo cual utilizaremos el símbolo $\sum$ para representar en la notación sigma. Su representación sería:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2$$

EJEMPLO 23

Rescribe y evalúa la siguiente suma:

$$\sum_{n=1}^3 \left(-2 + \frac{1}{n}\right)$$

Solución: $-1 - \frac{3}{2} - \frac{5}{3} = \frac{-6 - 9 - 10}{6} = -\frac{25}{6}$

8.4.6.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Obtener la suma de los primeros 100 números naturales

2.- Encuentra la suma de los primeros 8 términos de la serie aritmética $1+3+5 \dots$

3.- Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=1}^{10} (4n + 5)$

4.- La suma de los 6 primeros términos de una progresión es 39. La progresión comienza por 9; ¿Cuánto equivale el último término?

5.- Escribir la siguiente suma en notación sigma $2 - 3 + 4 - 5 + \dots$

PARA RECORDAR

Los elementos que intervienen en una progresión aritmética son los siguientes:

Primer término: a_1

Último término: a_n

Número total de términos: n

Diferencia: d

Suma de n términos: s_n
 a_n

No olvidarse que estos cinco elementos intervienen en las fórmulas fundamentales, es importante identificar cada uno de estos elementos, ya que de esta manera podremos plantear cualquier tipo de cálculo que se nos presente.

TALLER 2

a.- Hallar el:

1.- 12^{avo} término de 7, 10, 13, ...

2.- 16^{avo} término de -1, -4, -7, ...

3.- 25^{avo} término de $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, ...

b.- Encontrar el quinto, décimo y décimo octavo término de la progresión 7, 4, 1, ...

c.- En la progresión 2, 6, 10, ..., ¿cuál de sus términos equivale a 106?

d.- El décimo séptimo término de una progresión aritmética es -40 y el vigésimo octavo es -73. Hallar el primer término y su diferencia. Construir la progresión.

e.- Una progresión aritmética se compone de 13 términos, Su diferencia es $\frac{3}{2}$ y su último término es igual a 10. Cuanto equivale el primer término, construir la progresión.

f.- Interpolar seis medios aritméticos entre 2 y 22.

g.- Insertar doce medios aritméticos entre 127 y 6.

h.- Interpolar cinco medios aritméticos entre -5 y 5.

i.- Insertar ocho medios aritméticos entre 3,1 y 4,3.

j.- Insertar siete medios aritméticos entre $\frac{1}{7}$ y $\frac{6}{7}$.

k.- Interpolar suficientes medias aritméticas entre 1 y 50 para que la suma de la serie sea 459.

m.- Hallar el valor de la siguiente suma $9 + 13 + 17 + \dots + 61$

l.- Obtener la suma de la siguiente serie $\sum_{n=1}^{25} 2n$

m.- Al Sr. Pedro Torres le ofrecen un trabajo por 4 años con salario inicial de \$1.500 al año y un aumento de \$100 anuales cada año (después del primero), o bien un aumento de \$25 cada seis meses (después de los primeros seis meses). ¿Cuál es la mejor oferta?

n.- ¿Cuántos postes habrá en una pila de postes de alumbrado eléctrico, si hay 30 en la hilera del fondo, 29 en la segunda, y así sucesivamente, hasta llegar a 1 en la hilera superior?

o.- Una pelota que cae al vacío recorre 48 pies durante el primer segundo, 80 pies durante el segundo, 112 durante

el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuántos pies recorre la pelota durante el 6to segundo? ¿Cuál es la distancia total recorrida en el 8avo segundo?

p.- Encontrar tres números en progresión aritmética tal que la suma del primero y el tercero sea 10 y el producto del primero y el segundo sea 15.

q.- Jorge ha ganado \$168 en una semana. Si sus ganancias diarias están en progresión aritmética y el primer día ganó \$30; ¿cuánto ganó el segundo día y el séptimo día?

r.- La Sra. Freire ahorra cada mes \$0,50 más que en el mes anterior. En 10 años sus ahorros suman \$3.690. Determine lo que ahorro el primer mes y luego lo que ahorro el último mes.

s.- Obtener la suma de la siguiente serie $\sum_{n=1}^{14} (3n+1)$

t.- El Sr. Antonio Guerrero realiza un trabajo a razón de \$10 el primer día, \$11,50 el segundo día, \$13 el tercer día, y así sucesivamente. ¿Cuántos días trabajará para que pueda recaudar \$2.337,50?

u.- Hallar el vigésimo término de la sucesión 1,5 , 3 , 4,5 , ...

v.- Rescribe y evalúa cada una de las siguientes sumas:

1.- $\sum_{n=1}^4 \left(\frac{1}{2n}\right)$

2.- $\sum_{n=1}^5 \sqrt{2n+3}$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

3.- $\sum_{n=1}^5 \frac{1}{2n-1}$

w.- Escribir cada una de las siguientes sumas en notación sigma:

1.- $3 + 6 + 9 + 12 + \dots$

2.- $4 - 9 + 16 - 25$

3.- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$

8.5 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

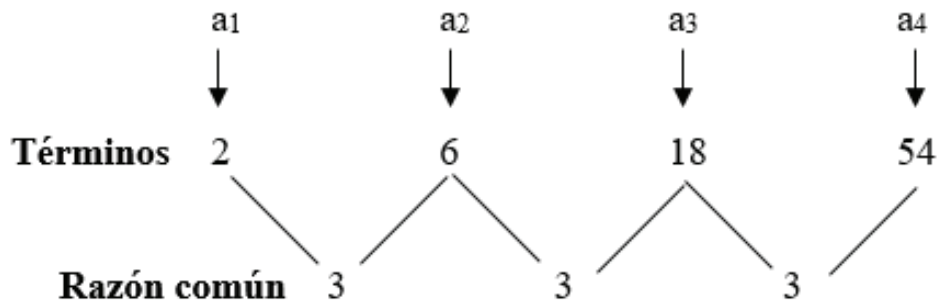
8.5.1 Definición

Una progresión geométrica es aquella por la cual a cada término de la misma se multiplica una constante (r) para obtener el siguiente término. La constante r se llama **RAZÓN COMÚN**.

La razón común (r) puede ser un número positivo, negativo o nulo. Para encontrar la misma, se divide a cualquier término por el que le precede.

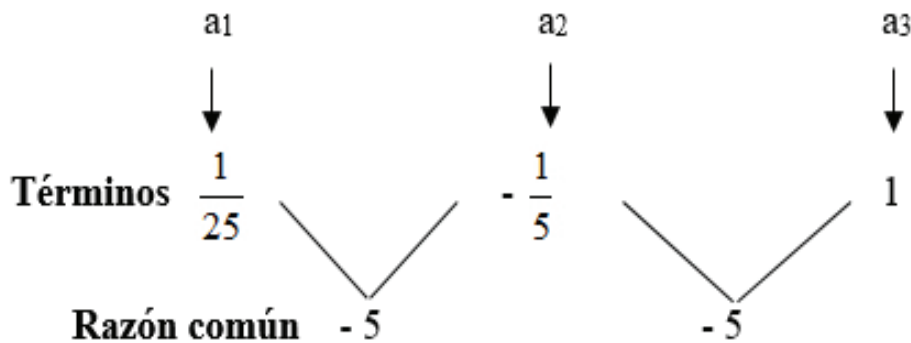
Según la razón común ya sea esta **POSITIVA** o **NEGATIVA** la progresión se dice que es **CRECIENTE** o **DECRECIENTE**.

EJEMPLO 24



En este primer ejemplo podemos notar que es una progresión geométrica creciente ya que la razón común es un número positivo; en este Caso 3.

EJEMPLO 25



En este segundo ejemplo analizamos que es una progresión geométrica decreciente ya que la razón común es un número negativo; en este caso - 5.

8.5.1.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Dadas las siguientes progresiones o sucesiones geométricas encontrar su razón común y establecer si es creciente o decreciente.

a.- 3 , 6 , 12 , 24,...

b.- 3 , - 9 , 27 , - 81 ,...

c.- 12, -4, $\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{9}$

d.- - 5 , - 0,5 , - 0,05 , - 0,005 ,...

e.- 10 , 20 , 40 , 80 ,...

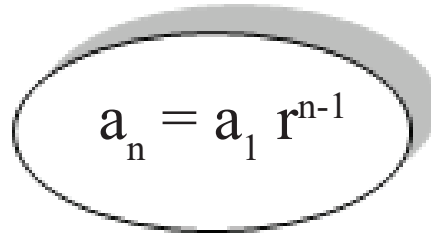
f.- $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$,....

8.5.2 Término enésimo de una progresión geométrica

Si decimos que a_1 es el primer término de una progresión geométrica, los siguientes términos de la progresión serán:

$$a^1, a^{1r}, a^{1r^2}, a^{1r^3}, \dots, a^{1m-1}$$

y así sucesivamente. Por consiguiente el **ENÉSIMO TERMINO** de una progresión o sucesión geométrica está dado por:


$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

EJEMPLO 26

Encontrar el sexto término de la progresión geométrica 3 , 15 , 75,...

Solución:

DATOS

$a_1 = 3$	$a_6 = 3 (5)^{6-1}$
$r = 5$	$a_6 = 3 (5)^5$
$n = 6$	$a_6 = 9375$

EJEMPLO 27

Una progresión geométrica se compone de 8 términos, la razón es 0,1 y su último término es 0,25. ¿Cuánto vale el primer término?

Solución:

DATOS

$n = 8$	$a_n = a_1 r^{n-1}$
$r = 0,1$	$0,25 = a_1 (0,1)^{8-1}$
$a_n = 0,25$	$0,25 = a_1 (0,1)^7$
$a_1 = ?$	$0,25 = a_1 0,0000001$
	$a_1 = \frac{0,25}{0,0000001}$
	$a_1 = 2.500.000$

EJEMPLO 28

La población de cierto país europeo es de 300.000.000 de habitantes el 1ro de Enero del 2002. Si su po-

blación aumenta el 5% del número de habitantes cada año, ¿cuál será su población el 1ro de Enero del 2.005?

Solución: Al final del 2.002 la población será el 105% de la población que había al principio de ese año, es decir,

$$\text{será: } \frac{105}{100} = 1,05 \text{ veces mayor.}$$

Formando la progresión geométrica tenemos:

$$3 \cdot 10^8, 3 \cdot 10^8 (1,05), 3 \cdot 10^8 (1,05)^2, 3 \cdot 10^8 (1,05)^3$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ a_n &= 3 \cdot 10^8 (1,05)^3 \\ a_n &= 3 \cdot 10^8 (1,157625) \\ \mathbf{a_n} &= \mathbf{347.287.500} \end{aligned}$$

EJEMPLO 29

El sexto término de una progresión geométrica es $\frac{128}{81}$ y su razón es $\frac{2}{3}$ encontrar el tercer término.

DATOS

$$n = 6$$

$$a_n = \frac{128}{81}$$

$$r = \frac{2}{3}$$

$$a_1 = ?$$

$$\frac{128}{81} = a_1 \left(\frac{2}{3} \right)^{6-1}$$

$$\frac{128}{81} = a_1 \left(\frac{2}{3} \right)^5$$

$$\frac{128}{81} = a_1 \left(\frac{32}{243} \right)$$

$$a_1 = 12$$

$$a_3 = 12 \left(\frac{2}{3} \right)^{3-1}$$

$$a_3 = 12 \left(\frac{2}{3} \right)^2$$

$$a_3 = 12 \left(\frac{4}{9} \right)$$

$$a_3 = \frac{16}{3}$$

8.5.2.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

- 1.- Encontrar el 13^{avo} término de 10 , 20 , 40 ,...
- 2.- En una progresión geométrica el primer último término es 640 y su primer término es 20; de cuantos términos se compone la progresión, sabiendo que su razón es 2.
- 3.- Una progresión geométrica que comienza por $3\sqrt{2}$ termina por 24. La razón es $\sqrt{2}$. ¿Cuántos términos hay en la progresión?
- 4.- Hallar el primer término de una progresión geométrica cuyo cuarto término es -8 y el quinto término es 32.
- 5.- En cierta ciudad africana el número de habitantes es de 1'200.000 habitantes en el año 2.000. Si su población ha venido creciendo aceleradamente en un 8,5% cada año; cuál será la población en el año 2.008.
- 6.- En la progresión 2, 6, 10, 14,..., ¿Cuál de sus términos tiene un valor igual a 286?
- 7.- Cierta población de bacterias aumenta geométricamente con un factor diario de 1.5; de cuánto será su población al cabo de una semana si inicialmente era de 120.
- 8.- Hallar el primer término de una progresión geométrica si consta de seis términos y su razón es equivalente a $\frac{2}{3}$, sabiendo que su último término es igual a 320.

8.5.3 CONSTRUCCIÓN DE PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

El objetivo fundamental es la construcción de una progresión geométrica dados algunos términos de la misma.

EJEMPLO 30

Una progresión geométrica se compone de 5 términos, el primero de los cuales es $\frac{2}{3}$ y su último término es 54. Determinar la razón y construir la progresión.

Solución:

DATOS

$$n = 5$$

$$a_1 = \frac{2}{3}$$

$$a_5 = 54$$

$$r = ?$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$54 = \frac{2}{3} r^{5-1}$$

$$\frac{54}{\frac{2}{3}} = r^4$$

$$r^4 = 54 * \frac{3}{2}$$

$$\sqrt[4]{r^4} = \sqrt[4]{81}$$

$$r = 3$$

La progresión geométrica sería : $\frac{2}{3}$, 2 , 6 , 18 , 54

8.5.3.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Una progresión geométrica se compone de cinco términos, el primero de los cuales es $-\frac{1}{3}$ y su último término es $-\frac{16}{3}$. Determinar la razón y construir la progresión.

2.- Una progresión geométrica se compone de seis términos, el quinto y el sexto término son 7203 y 50421 respectivamente. Construir la progresión

3.- Si el primer término de una progresión geométrica es -4 y su razón es $\frac{1}{2}$, construir la progresión, sabiendo que la misma consta de cuatro términos.

4.- Una progresión geométrica se compone de 6 términos, el primero de los cuales es $\frac{5}{6}$ y su último término es $-\frac{1296}{625}$. Determinar la razón y construir la progresión.

5.- Una progresión geométrica se compone de siete términos, el sexto y el último término son -1944 y 5832 respectivamente. Construir la progresión.

8.5.4 INTERÉS COMPUESTO

La cantidad inicial de dinero que se deposita en una cuenta bancaria se llama capital y se representa con la letra C. Si la tasa de interés anual es r, entonces al final del primer año el interés será Cr. Cuando el enteres es compuesto anualmente, el interés que se genera cada año se deposita el la cuenta al final del año. Así, la cantidad a l acumulada en la cuenta al final del primer año es:

$$a_1 = C + Cr = C (1 + r)$$

El interés generado sobre la cantidad al final del segundo año es $C (1 + r) r$. Si dicha cantidad se deposita entonces al final del segundo año, la cuenta bancaria contiene:

$$a_2 = C (1 + r) + C (1 + r) r$$

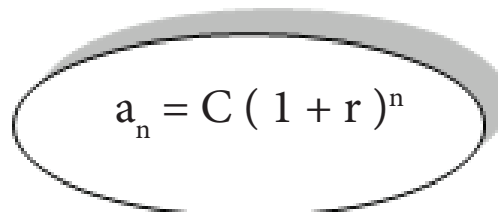
$$a_2 = C (1 + 2r + r^2) = C (1 + r)^2$$

Siguiendo este procedimiento, podemos construir la siguiente tabla:

AÑO	CANTIDAD AL FINAL DEL AÑO
1	$C (1 + r)$
2	$C (1 + r)^2$
3	$C (1 + r)^3$
4	$C (1 + r)^4$
n	$C (1 + r)^n$

Las cantidades de la segunda columna de la tabla forman una progresión geométrica con el primer término $C (1 + r)$ y razón $1 + r$. Así podemos establecer que la cantidad en la cuenta bancaria al final del año enésimo es:

$$a_n = [C (1 + r)] (1 + r)^{n-1}$$



$$a_n = C (1 + r)^n$$

EJEMPLO 31

El 1ro de Agosto del 2.000 el Sr. Andrés Torres depositó en una cuenta de ahorros un capital de \$200 que percibe un interés compuesto anual del 6%. Hallar la cantidad que habrá acumulado en su cuenta el 1ro de Agosto del 2.012.

Solución:

DATOS

$$C = 200$$

$$r = 6\% : 100 = 0,06$$

$$n = 12$$

$$an = ?$$

$$a_n = C (1 + r)^n$$

$$a_{12} = 200 (1 + 0,06)^{12}$$

$$a_{12} = 200 (2.01)$$

$$a_{12} = \$402$$

EJEMPLO 32

Hallar la cantidad que debe depositarse en una cuenta al 7,5% de interés compuesto anual para tener \$5.250 al cabo de 15 años.

Solución:

DATOS

$$C = ?$$

$$r = 7,5\% : 100 = 0,075$$

$$n = 15$$

$$a_n = 5250$$

$$a_n = C (1 + r)^n$$

$$C = \frac{a_n}{(1 + r)^n}$$

$$C = \frac{5250}{(1 + 0,075)^{15}}$$

$$C = \frac{5250}{2,96}$$

$$C = \$1.773,65$$

EJEMPLO 33

Cuánto tiempo se demorara en duplicarse una inversión al 13% de interés compuesto anual.

Solución:

DATOS

$$n = ?$$

$$C = 1$$

$$a_n = 2$$

$$r = 0,13$$

$$a_n = C (1 + r)^n$$

$$n = \frac{\log a_n - \log C}{\log(1 + r)}$$

$$n = \frac{\log 2 - \log 1}{\log(1 + 0,13)}$$

$$n = \frac{0,30}{0,05}$$

$$n = 6 \text{ años}$$

8.5.4.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Hallar la cantidad que debe depositar el Sr. Gutiérrez en su cuenta de ahorros a un 6,75% de interés compuesto anual para tener al cabo de 5 años \$12.500.

2.- En cuanto tiempo un capital se triplica al 8% de interés compuesto anual.

3.- El 25 de Septiembre del 2.001 el Sr. Pereira deposito en su cuenta de ahorros \$5.800 a una tasa de interés del 11,25% compuesto anual. Hallar la cantidad que habrá en la cuenta el 25 de Septiembre del año 2.015.

4.- A qué tasa de interés anual se deberán depositar \$4.000 para tener \$9.500 en la cuenta 12 años después.

5.- El Sr. Rivadeneira recibe una herencia. Después de satisfacer ciertas necesidades, él quiere hacer un depósito en su cuenta bancaria, lo cual le garantice que dentro de 20 años tendrá \$55.500. Si la entidad bancaria le da una tasa de interés del 12% compuesto anual, ¿cuál será el capital que deberá depositar en la cuenta?

8.5.5 Media geométrica

En una progresión geométrica finita el primero y último término se llaman extremos, y todos los demás términos entre uno y otro extremo se llaman medios.

Si una progresión geométrica finita tiene tres términos, m , x , n se dice que x es la media geométrica entre m y n . Ya que su razón es constante, es decir:

$$\frac{x}{m} = \frac{n}{x}$$

de donde:

$$x^2 = mn \quad \text{o} \quad x = \pm\sqrt{mn}$$

es decir que las raíces cuadradas del producto de dos números son medios geométricos entre estos dos números.

es decir que las raíces cuadradas del producto de dos números son medios geométricos entre estos dos números.

EJEMPLO 34

Si los números son 4 y 100 tenemos que:

$$x = \pm\sqrt{4*100} = \pm\sqrt{400} = \pm 20$$

De donde resultan las dos progresiones geométricas que son:

4 , 20 , 100 y 4 , - 20 , 100

En algunos casos se utiliza la raíz positiva si los números dados son positivos, o puede ser la raíz negativa cuando los números dados son negativos.

Para poder interpolar varios medios geométricos entre dos números dados, se empieza por encontrar el valor de la razón (r) del a fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$, teniendo en cuenta que el número total de términos (tomando en cuenta los extremos) será $m+2$, y se procede a obtener los medios multiplicando el primer extremo por r , así con cada uno de los números que se van obteniendo.

Cuando el valor de m es par el ejercicio tiene una sola solución real, pero cuando el valor de m es impar el resultado del ejercicio tiene dos soluciones reales.

EJEMPLO 35

Interpolación tres medios geométricos entre 1 y 81.

Solución:

DATOS

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1 & a_n = a_1 r^{n-1} \\ a_4 = 81 & 81 = 1 r^{5-1} \\ n = 5 & 81 = r^4 \\ & r = \pm 3 \end{array}$$

Si analizamos nos damos cuenta de que tiene dos respuestas el ejercicio ya que el resultado de una raíz con índice par tiene dos valores, en este caso: $+3$ y -3 .

La primera interpolación sería: $1, 3, 9, 27, 81$

La segunda interpolación sería: $1, -3, 9, -27, 81$

EJEMPLO 36

Interpolación dos medios geométricos entre -4 y 108 .

Solución:

DATOS

$$\begin{array}{l} a_1 = -4 \\ a_4 = 108 \\ n = 4 \end{array}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$108 = -4 r^{4-1}$$

$$\frac{108}{-4} = r^3$$

$$r^3 = -27$$

$$r = \sqrt[3]{-27}$$

$$r = -3$$

En este segundo ejemplo podemos decir que existe un solo resultado para el ejercicio ya que la raíz en este caso es -3 .

La interpolación sería: $-4, 12, -36, 108$.

8.5.5.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Interpolar un medio geométrico entre 9 y 16.

2.- Interpolar cinco medios geométricos entre $\frac{7}{8}$ y 56.

3.- Interpolar cuatro medios geométricos entre $\frac{1}{9}$ y 27.

4.- Insertar seis medios geométricos entre 512 y -4 .

5.- Insertar tres medios geométricos entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{1}{20}$

6.- Insertar dos medios geométricos entre -2 y 128.

8.5.6 Series geométricas

Es una serie asociada a una sucesión geométrica; es decir, es la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica (S_n); está representada por la siguiente fórmula:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

cuya deducción de la fórmula es la siguiente:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1} \quad (1)$$

Si se multiplica ambos miembros de la igualdad por r , tenemos que:

$$r S_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^{n-1} + a_1r^n \quad (2)$$

Al restar la segunda ecuación de la primera, obtenemos:

$$S_n - r S_n = a_1 - a_1r^n$$

$$S_n (1 - r) = a_1 (1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

Esta fórmula se utiliza para obtener la suma de los primeros **ene términos** de una serie geométrica.

EJEMPLO 37

Encontrar la suma de los seis primeros términos de la progresión geométrica $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}$

Solución:

DATOS

$$a_1 = 3$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$n = 6$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S_6 = \frac{3\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_6 = \frac{3\left(1 - \frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$S_6 = 6\left(\frac{63}{64}\right)$$

$$S_6 = \frac{189}{32}$$

EJEMPLO 38

Encontrar la suma de la serie geométrica $\sum_{n=1}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Solución:

Primero hallamos los términos que componen la progresión geométrica:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

DATOS

$$a_1 = \frac{1}{4}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$n = 5$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_5 = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$S_5 = \frac{31}{64}$$

EJEMPLO 39

El Sr. Pedro Pita construyó una casa en 1.998. Con sus utilidades que obtuvo pudo construir dos casas en 1.999. Con las utilidades de éstas, construyó cuatro casas en 1.992. Suponiendo que el Sr. Pita es capaz de continuar duplicando el número de casa que construye cada año, encuentre el número total de casa que habrá construido al final del año 2.000.

Solución:

DATOS

$$a_1 = 1$$

$$r = 2$$

$$n = 11$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_{11} = \frac{1(1-(2)^{11})}{1-2}$$

$$S_{11} = \frac{1-2048}{-1}$$

$$S_{11} = \frac{-2047}{-1}$$

$$S_{11} = 2.047 \text{ casas}$$

8.5.6.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Encontrar la suma de la serie geométrica $\sum_{n=1}^5 3^n$

2.- Calcule la suma de la siguiente serie geométrica $20 + 2 + 0,2 + 0,02$

3.- Un padre proyecta depositar en el banco \$30 el día que su hijo cumpla un año y duplicar la cantidad en cada uno de los cumpleaños de su hijo. ¿Cuánto tendrá su hijo al cumplir 15 años?

4.- Encontrar la suma de la serie geométrica $\sum_{n=1}^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

5.- Obtener la suma de los primeros cinco términos de la serie $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

6.- Una pelota de basketball se lanza desde una altura de 16 m, en cada rebote se eleva $\frac{1}{4}$ de la altura alcanzada en la caída previa. ¿A qué altura se elevará al sexto rebote?

8.5.6.2 Series geométricas infinitas

Consideremos una serie geométrica infinita.

$$3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \dots + 3n + \dots$$

A medida que n se incrementa, es decir, se hace más grande, la suma de los primeros n términos crece sin límite alguno. No obstante, el siguiente ejemplo es diferente:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$$

Ahora consideremos la suma de los primeros n términos para algunos valores de n .

$$S_1 = \frac{1}{3}$$

$$S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$S_1 =$

$$S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27}$$

$$S_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{40}{81}$$

$$S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$$S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27}$$

$$S_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{40}{81}$$

Cada denominador es de la forma 3^n . Cada numerador es menor que el denominador, lo cual significa, que a medida que n se va haciendo cada vez mayor, S_n se acerca cada vez más a 1. Se dice que S_n se acerca a un **límite** igual a 1. Definimos la suma de esta serie infinita como 1.

Definición.- Si para una serie infinita, S_n se aproxima a algún límite a medida que n se incrementa, el límite se define como la suma de la serie. Si una serie infinita tiene una suma, se dice que converge o que es convergente.

PARA RECORDAR

Algunas series infinitas tienen suma (son convergentes) y otras no.

Una serie geométrica infinita es convergente y tiene, por lo mismo, una suma si y sólo si:

$$|r| < 1 \quad (\text{el valor absoluto de la razón común es menor que } 1)$$

EJEMPLO 40

Determinar cuales de las siguientes series geométricas tienen una suma:

$$1 - 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$$

$$r = -\frac{1}{3} \quad |r| < 1$$

La serie tiene una suma ya que el valor de la razón común es menor que 1.

$$\text{b) } 1 + 6 + 36 + 216 + \dots \quad r = 6 \quad |r| > 1$$

La serie no tiene una suma.

$$\text{c) } 2 + (-2) + 2 + (-2) + \dots \quad r = -1 \quad |r| = 1$$

La serie no tiene una suma.

8.5.6.2.1 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Determinar cuáles de las siguientes series geométricas son convergentes:

$$\text{a.- } 9 + 81 + 729 + \dots$$

$$\text{b.- } 6 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots$$

$$\text{c.- } -\frac{5}{3} - \frac{10}{9} - \frac{20}{27} - \dots$$

$$\text{d.- } 1 + 0,1 + 0,01 + \dots$$

e.- $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots$

f.- $3 - 6 + 12 - 24 + \dots$

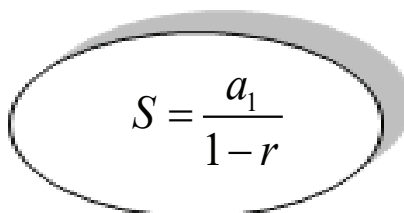
8.5.6.2.2 Determinación de sumas de una serie geométrica infinita

La suma de los primeros n términos de una serie geométrica infinita es

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

A medida que n se va incrementando, podemos ver que r^n va disminuyendo su valor, aproximándose a 0, pues $|r| < 1$. El límite de S_n cuando n incrementa ilimitadamente, es, por lo tanto: $\frac{a_1}{1 - r}$ y tendremos que: $S = \frac{a_1}{1 - r}$

En otras palabras, la suma de una serie geométrica infinita, cuando $|r| < 1$, está dada por:



$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

EJEMPLO 41

Encontrar la suma de la serie geométrica infinita $4 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \dots$

Solución:

DATOS

$$a_1 = 4$$

$$r = -\frac{1}{4}$$

$$S = \frac{4}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$S = \frac{4}{1 + \frac{1}{4}}$$

$$S = \frac{4}{\frac{5}{4}}$$

$$S = \frac{16}{5}$$

EJEMPLO 42

Encontrar la suma de la serie geométrica infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

Solución:

DATOS

$$a_1 = 1$$

$$r = -\frac{1}{3}$$

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$S = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$S = \frac{1}{\frac{4}{3}}$$

$$S = \frac{3}{4}$$

8.5.6.2.3 EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Hallar la suma de las siguientes series geométricas infinitas:

a.- $3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots$

b.- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

c.- $1 - 0,1 + 0,01 - \dots$

d.- $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$

e.- $7 + 3 + \frac{9}{7} + \dots$

PARA RECORDAR

Los elementos que intervienen en una progresión geométrica son los siguientes:

Primer término:	a1
Último término:	an
Número total de términos:	n
Razón común:	r
Suma de n términos:	sn

Al igual que en las progresiones aritméticas, es importante identificar cada uno de estos elementos que intervienen en las progresiones geométricas, ya que de esta manera podremos plantear cualquier tipo de cálculo que se nos presente.

TALLER 3

1.- 12^{avo} término de $10, 15\sqrt{2}, 45, \dots$

2.- 5^{to} término de $\frac{8}{243}, \frac{4}{81}, \frac{2}{27}, \dots$

3.- 14^{avo} término de $2, 2\sqrt{3}, \dots$

b.- Una progresión geométrica se compone de seis términos, la razón es -3 y su último término es -1.458 . ¿Cuál es el valor del primer término?

c.- En la progresión $162, 54, 18, \dots$ obtener el 10mo término y la suma de los siete primeros términos.

d.- El tercer término de una progresión geométrica es 10 y el sexto término es 0,001. Encontrar la suma de los nueve primeros términos.

e.- Obtener la suma de los primeros nueve términos de la serie geométrica

$$16 - 8 + 24 + \dots$$

f.- Una progresión geométrica se compone de seis términos. El último término es 18.750 y la razón es -5 . Hallar el primer término y construir la progresión.

g.- Interpoliar cuatro medios geométricos entre -3 y $-\frac{1}{243}$

h.- En una progresión geométrica el primer término es 6, el último término es $\frac{2}{9}$ y $\frac{1}{3}$. De cuantos términos se compone la progresión y obtener la sumatoria.

i.- Encontrar la suma de las siguientes series geométricas infinitas:

1. - $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

2.- $16 + 12 + 9 + \frac{27}{4} + \dots$

3.- $S_5 = \frac{242}{3}$, $n = 5$, $r = 3$; hallar a_1 y a_n .

o.- Interpoliar cuatro medios geométricos entre -5 y 5120.

p.- Un estudiante pidió un préstamo de \$1.500 al 12,5% de interés compuesto mensualmente. El estudiante saldará el préstamo en un único pago al cabo de 24 meses. ¿A cuánto ascenderá la deuda?

q.- Encontrar la suma de la siguiente serie geométrica $\sum_{n=1}^5 5^n$

r.- Hallar la suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica cuyo cuarto término es 256 y cuyo último término es 16.384.

s.- Cuánto tiempo se demorará en triplicarse una inversión al 6,75% de interés compuesto anual.

t.- Si una progresión geométrica se compone de cuatro términos, la razón es 8 y su último término es 1024. Hallar el primer término y la sumatoria de los cuatro términos.

u.- Insertar cuatro medios geométricos entre 40 y $-1,25$.

v.- Calcular la suma de los ocho primeros términos de la progresión geométrica: $9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots$

w.- Cada año una persona invierte \$1.000 en un plan de ahorros del cual percibe intereses a una tasa fija del 7% anual. Cuál es el valor de este plan de ahorros al décimo segundo aniversario de la primera inversión.

BIBLIOGRAFÍA

Arnaz, J. (1995). Iniciación a la lógica simbólica. Editorial Trillas, S.A de C.V. México.

Baldor, A. (1982). Álgebra. Editorial Cultural Venezolana, S. A. Caracas, Venezuela.

Batanero, M.; Godino, J. y Navarro-Pelayo, V. (1994). Razonamiento combinatorio. Madrid.

Colección ESPARTACO. (2009). Razonamiento Matemático. Lima: Editora Kano.

Colección Mi Academia. (2005). Exámenes de admisión. Lima : San Marcos.

Granville, W., Mikesh, J., & Smith, P. (1992). Trigonometría plana y esférica: con tablas trigonométricas. México D.F. Unión Tipográfica Editorial Hispano-americana. Instituto Politécnico Nacional.

Lehmann, C., García Díaz, R., & Santaló Sors, M. (1980). Geometría Analítica. Editorial Limusa. México, D.F.

Leithold, L. (1994). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México D.F. Oxford University Press.

Miller, Charles; Heeren, Vern; y Hornsby, John. (1996). Matemática: razonamiento y aplicaciones. Traducción: Víctor Hugo Ibarra y Javier Enríquez, Editorial Pearson, Décima Edición. Recuperado de: <https://books.google.com.ec/books?id=uapEWymIU6kC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>.

Psicotécnicos. (2010). Psicotécnicos. En O. B. Nicolás, Psicotécnicos Curso completo paso a paso (pág. 128). Lima Perú: San Marcos.

Santibañez, J. (1994). Elementos del Razonamiento Matemático. Lima: Edición 1998.

Sullivan, M. (1997). Precálculo. Prentice-Hall Hispanoamericana. México D.F.

Stewart, J; Redlin, L. y Watson, S. (2001). Precálculo. International Thompson Editores, S.A de C.V México, D.F.

Swokowski, E. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Cengage Learning. México D.F.

Timoteo, S; Falcón N. (2006). Aptitud académica tipo UNMSM Siglo XXI. Lima: San Marcos.

Zill, D. G., & Dewar. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Mc Graw Hill. México, D. F.



ISBN: 978-9942-805-26-3



9 789942 805263